جامعة عين شمس
كلية التجارة

اساسيات الطرق الاحصائية

تأليف

د. نور الدين رمضان

د.ممدوح عبد العليم

مراجعة

د. انجه الصايغ

قسم الاحصاء والرياضة والتامين

كلية التجارة – جامعة عين شمس

مقدمة

يقدم هذا الكتاب شرحا وافيا لبعض اساسيات الطرق الاحصائية الأكثر استخداما فى المجالات التجارية وكذلك بعض مجالات التطبيق للاساليب الاحصائية المختلفة .

يبدأ الكتاب بالباب الأول : مقدمة فى الاحصاء.

ثم الباب الثانى :تنظيم البيانات وتلخيصها وعرضها.

ثم الباب الثالث :مقاييس النزعة المركزية أو الموضع (المتوسطات)

ثم الباب الرابع :مقاييس التشتت والاختلاف .

ثم الباب الخامس :الارتباط .

واخيرا الباب السادس : الارقام القياسية .

وقد راعينا فى هذا الكتاب عرض الموضوعات بأسلوب ميسر واضح مع اعطاء الامثلة المختلفة .

ونامل أن يفى الكتاب بصورته الحالية بالهدف الذى كتب من أجله .

المؤلفان

الفهرس

الصفحة

الموضوع

الباب الأول
مقدمة فى الاحصاء
Introduction

للاحصاء عدة معان؛ والمعنى الشائع للاحصاء يشير إلى البيانات أو المعلومات (Data) ومثال ذلك بيانات الناتج الزراعى أو الصناعى الخاص بدولة معينة أو عدة دول وأيضاً لمحصول معين أو صناعة معينة . . . إلخ. كما يشير أيضاً إلى بيانات التعداد سواء السكانى أو الزراعى أو الصناعى وخلافه.

تبعاً لهذا المعنى، فإن الاحصاء يشتمل على حقائق معينة متمثلة فى مجموعة من الأرقام أو البيانات والمعلومات.، وهناك معنى آخر وهو يشير إلى المبادىء المختلفة والأساليب المتعددة المستخدمة فى جمع وتحليل وتفسير هذه الحقائق الكمية. وتبعاً لهذا المعنى فإن كلمة الاحصاء تشير إلى "علم الاحصاء" والذى كان يمثل فرعاً من فروع الرياضة التطبيقية والذى أصبح الآن علماً قائماً بذاته له أساليبه وأسسه وقواعده وكذا فروعه المختلفة، وكذلك يوجد معنى ثالث لكلمة احصاء والذى يشير إلى أى مقياس أو مقاييس احصائية يتم الحصول عليها من عينة أو جزء من مجتمع ظاهرة معينة. ومما يذكر أن ذلك المقياس أو المقاييس الاحصائية والذى يخص المجتمع كله يطلق عيه اسم "معلمة" أو "معالم" هذا المجتمع.

ومما هو جدير بالذكر أن دراستنا سوف تجمع بين الأساليب الاحصائية المستخدمة لتحيط بجوانب الاحصاء كأداة لجمع وعرض وتبويب البيانات ثم كعلم له نظرياته وقواعده ومقاييسه المختلفة بهدف الوصول إلى قيم معالم مجتمع الظاهرة أو تقدير لها من عينات مسحوبة من هذا المجتمع

أى أن علم الاحصاء هو العلم الذى يختص بالطرق العلمية لجمع البيانات وتنظيمها

وتلخيصها، وذلك عن طريق التعبير عنها أو عرضها بصورة علمية وتحليلها بغرض الوصول إلى استنتاج النتائج والقوانين التي تحكمها، واتخاذ القرارات الملائمة لذلك.

وينبغي الإشارة إلى وجود قسمين رئيسين للإحصاء :

القسم الأول : الإحصاء الوصفي Descriptive statistics

يشمل الطرق الخاصة بتنظيم البيانات وتلخيصها وعرضها فى صورة جداول إحصائية أو رسوم بيانية، أو أشكال هندسية، أو تلخيصها، أو حساب مقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت وغيرها من المقاييس الأخرى.

القسم الثاني : الإحصاء الاستدلالى ،الاستنتاجي، (التحليلى) Statistical inference –

هو عبارة عن مجموعة الطرق العلمية التى تُستخدم للاستدلال على المجتمع بناء على البيانات الإحصائية التى جُمعت من عينة من هذا المجتمع وفق طرق إحصائية محددة. وتشتمل على عدد من المفاهيم والنظريات، مثل نظرية التقدير، واختبار الفروض، ومراقبة جودة الإنتاج.

ويمكن تحديد أهداف علم الاحصاء فى ثلاثة أهداف أساسية :

- جمع البيانات عن الظاهرة محل الدراسة بطريقة علمية.
- عرض هذه البيانات باستخدام الأساليب الاحصائية المختلفة بعد تبويبها وتصنيفها ويتم هذا العرض باستخدام الجداول أو الرسوم البيانية.
- تحليل البيانات بهدف التوصل إلى التنبؤ واتخاذ القرارات سواء التي تتعلق برسم السياسات أو وضع الخطط والبرامج المحققة لهذه السياسات.

خصائص علم الاحصاء Characteristics of Statistics

أ- يجب أن يعتمد على حقائق كمية Quantitative.

ب- يعتمد على حقائق جماعية وليست حقائق فردية.

جـ- يجب أن تكون هذه الحقائق الجماعية مرتبطة ببعضها من حيث تطورها مع الزمن

أو وضعها بالنسبة لجميع الحقائق المناسبة لهذه المجموعات.

د- أن تكون الظاهرة المتوافر عنها بيانات معينة تتشابك فى علاقتها وتتأثر وتؤثر بعديد من العوامل مع ظاهرة أخرى حتى يمكن للاحصائى أن يدرس خواص هذه العلاقة وأسباب تطورها، ويصل إلى تفسيرات معنوية هذه التأثيرات لتلك العوامل المتعددة.

هـ- الاحصاء يهدف إلى الوصول إلى القيمة الحقيقية لمقاييس المجتمع المختلفة.

المتغيرات variables وانواعها :

تعتبر المتغيرات هى الجزء الأساسى الذى يتعامل معه الاحصائى. والمتغيرات الاحصائية لها أكثر من تصنيف منها :

١- **المتغيرات الكمية والمتغيرات النوعية :**

يرتكز هذا التصنيف على مدلول القيمة المختلفة للخاصية المقاسة، فإذا كانت هذه القيمة تشير إلى مقدار ما فى الفرد من خاصية مقارناً بأفراد مجموعته، فإن هذه القيمة تحمل معنى كمياً وأن المتغير متغير كمى أو رقمى *Quantitative* ، وإذا كانت القيمة لاتعبر عن مقدار الخاصية عند فرد معين وإنما تعبر فقط عما إذا كان يمتلك تلك الخاصية أم لا، أو أنها تشير إلى فئة أو مجموعة مثل الجنس، المرحلة الدراسية، اللون، فإن هذه المتغيرات متغيرات نوعية لأنها تأخذ قيماً وصفية أو نوعية أو غير رقمية *Qualitative*.

والمتغيرات الكمية تصنف إلى نوعين إما متغيرات كمية متصلة *Continuous*، أو متغيرات كمية منفصلة *Discrete* فالمتغير الكمى المتصل (المستمر) هو المتغير الذى يأخذ أى قيمة فى مدى معين مثل الأطوال والأوزان والأعمار، أما المتغير الكمى المنفصل (المتقطع) فيطلق على المتغيرات التى تخضع القيم التى تأخذها هذه المتغيرات للعد وليس للقياس، مثل عدد الطلبة فى الشعب الدراسية، وعدد أفراد الأسرة، وعدد الغرف فى المسكن.

٢- **المتغيرات المستقلة والمتغيرات التابعة :**

تصنف المتغيرات بهذه الصورة على أساس العلاقة بين المتغيرين، هذه العلاقة تمكن الاحصائى من التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين (المتغير التابع *dependent*) من معرفته لقيمة المتغير الآخر وهو (المتغير المستقل *Independent*).

جمع البيانات Collection of data

لعل من الأهمية أن يحدد الباحث نوع البيانات التى يرغب فى الحصول عليها فى الدراسة التى يقوم بها. لأن هذه الخطوة يترتب عليها العديد من الخطوات الأخرى التالية فقد يكتشف الباحث أن هذه البيانات سبق لأحد الباحثين التوصل إليها، أو قد يكتشف بأن هذه البيانات من المتعذر الوصول إليها بسبب ما يحيطها من سرية الأمرالذى قد يجعله أن يعيد النظر تماماً فى دراسته، أما إذا لم تكن هذه البيانات قد توصل إليه باحثون آخرون أو لا توجد صعوبة فى الحصول عليها. فإن تحديد هذه البيانات يترتب عليه تحديد مصادرها أى المصادر التى يمكن أن يلجأ إليها الباحث للحصول عليها أى المصادر التى توجد لديها هذه البيانات ثم يحدد الطريقة أو الوسيلة التى يستخدمها من أجل الحصول عليها.

مصادر جمع البيانات الاحصائية :

تنقسم مصادر البيانات إلى نوعين :

المصدر الأول : المصدر التاريخى (مصدر غير مباشر) :

هى عبارة عن بيانات جاهزة للاستخدام ومدونة فى سجلات سابقة مثل الوثائق والمطبوعات المنشورة والبحوث والدراسات التى تصدرها الهيئات المختلفة. ويطلق على هذا المصدر مصدر غير مباشر لأن الباحث عند حصوله على هذه البيانات لا يتصل بالوحدات المبحوثة نفسها بل يحصل على هذه البيانات من هيئات أخرى نتيجة توفرها لدى هذه الهيئات، وينقسم هذا المصدر إلى نوعين : مصادر أولية، مصادر ثانوية ويقصد

بالمصادر الأولية *Primary*: أن هذه المصادر التى تتوفر لديها هذه البيانات وتقوم بنشرها هى نفس الجهة التى قامت بجمعها مثال ذلك النشرات التى يصدرها الجهاز المركزى للتعبئة العامة والاحصاء حيث أن الجهاز هو الذى قام بجمع البيانات ثم قام بنشرها. أما المصادر الثانوية *Secondary* : فهى المصادر التى قامت بنشر البيانات أو تتوفر لديها هذه البيانات إلا أن هذا المصدر أو هذه البيئة ليست هى التى قامت بجمع البيانات مثلما تقوم الصحف والمجلات بنشر بيانات عن السكان أخذتها عن الجهاز المركزى للتعبئة العامة والاحصاء، ولا شك أن الباحث عليه أن يلجأ إلى المصادر الأولية بدلاً من المصادر الثانوية حتى لا تتعرض هذه البيانات للاخطاء نتيجة نقلها من مصدر إلى آخر.

المصدر الثانى : المصدر الميدانى (مصدر مباشر) :

يتم جمع البيانات عن طريق المصدر الميدانى بطريقة أو أكثر من الطرق التالية: المقابلةالشخصية ، أو البريد، أو التليفون، أو الملاحظة، أو الاستمارة الاحصائية.

وسوف نتناول كل طريقة بالشرح كما يلى :

أ- المقابلة الشخصية:

تقوم الجهة القائمة بجمع البيانات بتدريب عدد من الأشخاص على كيفية إجراء المقابلات الشخصية بغرض جمع البيانات وتدوينها. ويقوم هؤلاء الأشخاص عادة بالانتقال إلى أفراد المجتمع المراد جمع البيانات منه وسؤال أفراد العينة المطلوب دراستها، وتسجيل الإجابة فى المكان المخصص لها فى الاستبيان أو الاستفسارات المطلوب الإجابة عنها، ويجب على الأشخاص المكلفين بجمع البيانات التحلى بحسن المقابلة، وتفادى الإحراج، والتأكيد على محافظتهم على سرية البيانات، وأنها لن تستخدم إلا لغرض الدراسة المشار إليها، وعدم الإيحاء للأفراد المدروسين بإجابات معينة.

ب- طريقة البريد:

تستخدم فى جمع البيانات من المصالح الحكومية، والهيئات والمؤسسات العامة،

وذلك بأن تقوم الجهة التى نريد جمع البيانات بإرسال الاستبيانات المطلوب تعبئتها إلى المصالح الحكومية، أو الأهلية الأخرى، ثم استلام الردود بالبريد. وأهم مميزات هذه الطريقة هو أنها قليلة التكاليف، أما عيوبها فضياع الخطابات، أو عدم وجود الموظف المختص للرد على مثل هذه الطلبات، أو عدم اهتمام الموظف بأهمية الموضوع للرد عليه.

جـ- طريقة التليفون:

هى طريقة سريعة لجمع البيانات فمثلاً إذا أرادت وزارة التعليم معرفة عددالطلاب المتوقع تخرجهم من جامعة عين شمس للعام الدراسى الحالى فإنها تقوم بالاتصال تليفونياً بإدارة القبول والتسجيل بالجامعة لمعرفة ذلك العدد.

قد تكون هذه الطريقة غير ممكنة لو أردنا دراسة حالة السكن، أو مدى ملاءمة العمل للتخصص لخريجى جامعة عين شمس مثلاً فى سنة ما، أو فى عدد معين من السنوات، وذلك ربما لعدم وجود تليفونات عند جميع الأشخاص الذين هم محل الدراسة، أو بتعطل هذه التليفونات، أو تغير الأرقام.

د- طريقة الملاحظة:

تُعرّف الملاحظة بأنها المشاهدة الدقيقة لظاهرة ما، مع الاستعانة بأساليب البحث والدراسة التى تتلاءم مع طبيعة هذه الظاهرة. وعن طريق الملاحظة يقوم الباحث بتتبع سلوك المبحوثين ويسجل كل ملاحظاته بأمانة ودقة، دون التدخل برأيه الخاص فيما يلاحظه من سلوك حتى لا تتأثر البيانات بذاتيه الباحث، ولكى تكون هذه الملاحظة ملاحظة منتظمة يجب التخطيط لها بدقة وهناك بعض الأسس التى يجب مراعاتها عند استخدام طريقة الملاحظة المنتظمة :

- تحديد عدد الأفراد الذين سيقوم الباحث بملاحظة سلوكهم.
- تحديد نوع السلوك موضع الدراسة تحديداً دقيقاً.
- تحديد التوقيت الزمنى للملاحظة والمدة التى تستغرقها.

- تحديد من الذى سيقوم بالملاحظة بحيث يتم تدريبه.
- أن تتم الملاحظة بصورة غير مباشرة وهذا بمعنى أن لا يشعر المبحوثون بأنهم موضع ملاحظة حتى لا يؤثر ذلك على سلوكهم.
- أن تسجل الملاحظات التى يقوم بها الباحث بصورة واضحة ودقيقة.

هـ- الاستمارة الاحصائية (صحيفة الاستبيان) Questionnaire

هى عبارة عن ورقة أو أكثر تحتوى على الأسئلة المراد الإجابة عنها وكل سؤال يترك له مكان للإجابة عنه، ثم توزع هذه الاستمارات على أفراد العينة من المجتمع محل الدراسة ويتم جمعها بعد وقت كاف للإجابة عنها. وهناك مجموعة من الاعتبارات التي يجب على الباحث مراعاتها عند تصميم استمارة البحث :

١- تحديد أهداف الاستبيان بدقة وعلى ضوء ذلك يقوم بتحديد المعلومات أو البيانات اللازم الحصول عليها لتحقيق هذا الهدف، والبعد عن أية بيانات لاجدوى منها.
٢- أن تكون الاستمارة قصيرة قدر الإمكان لأن تطويل الاستبيان غير مرغوب فيه.
٣- أن تكون الأسئلة واضحة لا لبث فيها ولا غموض.
٤- يجب أن تصاغ الأسئلة بصورة يفهمها المبحوث.
٥- البعد عن الأسئلة المحرجة.
٦- أن لا تتطب الأسئلة تفكيراً عميقاً أو عمليات حسابية معقدة.
٧- البعد عن الأسئلة الإيحائية.

وجدير بالذكر أنه بعد إعداد الاستمارة بعناية وعرضها على بعض المحكمين أن تخضع الاستمارة للاختبار عن طريق إختيار مجموعة من المبحوثين متماثلين مع العينة التي ستجرى الدراسة عليها ثم تجرب عليهم الاستمارة، ثم ادخال التعديلات على الاستمارة فى ضوء ما يسفر عنه تجريبها على هذه المجموعة الصغيرة.

أسلوب جمع البيانات :

هناك أسلوبان لجمع البيانات :

- أسلوب التعداد أو الحصر الشامل.
- أسلوب المعاينة (العينة).

أ- أسلوب الحصر الشامل :

ويعرف المجتمع Population بأنه مجموعة ذات خصائص مشتركة من الأفراد محل الدراسة ويقسم المجتمع الاحصائى إلى محدود وغير محدود.

وبهذا الأسلوب يقوم الباحث بجمع البيانات من جميع مفردات المجتمع (جميع المفردات التى نريد معرفة حقائق عنها) وهذا الأسلوب يستخدم فى التعدادات كما تستخدم فى بعض الحالات التى يكون الباحث جاهلاً تماماً بطبيعة أفراد البحث فإذا أردنا مثلاً دراسة ظاهرة التدخين باستخدام الحصر الشامل فيجب على الباحث أن يتصل بجميع الأشخاص المدخنين فى المدينة مجال البحث ولهذا الأسلوب مميزات كما أنه له بعض العيوب. ومن مميزات هذا الأسلوب أنه يعطى نتائج كاملة ودقيقة عن الظاهرة محل الدراسة بالاضافة إلى أنها لا تحتوى على أخطاء عشوائية وهى التى ترتبط باستخدام أسلوب المعاينة، ومن أهم عيوب هذا الأسلوب أنه يستغرق وقتاً طويلاً فى الحصول على البيانات مما يقلل من قيمة البحث، كما أن هذا الأسلوب يتطلب نفقات عالية قد لا يقوى عليها القائم بالبحث سواء كان فرداً أوهيئة حتى أن الدول لا تقوى على اجراء التعداد السكانى إلا كل عشر سنوات. كما أن استخدام أسلوب الحصر الشامل يصبح مستحيلاً فى حالة المجتمعات غير المحدودة أو إذا كان استخدامه يؤدى إلى تدمير الوحدات المدروسة مثلما يحدث فى مراقبة جودة الانتاج.

ب- أسلوب المعاينة (العينة):

ونعرف العينة sample بأنها جزء من المجتمع تختار بحيث تمثل جميع صفات المجتمع.

وهوالأسلوب الذى يستطيع الباحث عن طريقه من الحصول على البيانات التى تتعلق بظاهرة معينة باستخدام جزء من مجتمع البحث بدلاً من الحصول على هذه البيانات من جميع مفردات المجتمع. ثم يقوم الباحث بعد الحصول على البيانات من جزء من المجتمع (عينة) بتعميم النتائج التى حصل عليها على المجتمع ككل.

فمثلاً لو أردنا دراسة ظاهرة مشكلات شباب الجامعة باستخدام العينة فاننا نقوم بإختيار جزء من شباب الجامعة ثم نجمع البيانات التى تتعلق بالظاهرة من هذا الجزء، وباستخدام الطرق والأساليب الاحصائية يمكن تعميم النتائج التى تم التوصل إليها من العينة على المجتمع ككل. ولكى يتمكن الباحث من تعميم النتائج يجب أن يراعى شروط معينة عند إختيار هذا الجزء (العينة) بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيلاً صادقاً.

وتستخدم العينة فى البحوث بشكل كبير نظراً لأنها تتمتع ببعض المميزات التى لاتتوفر فى أسلوب الحصر الشامل، مثل توفير الوقت والجهد والنفقات، ومع ذلك فهى لا تخلو من العيوب مثل أنها لا تعطى نتائج مطابقة للنتائج التى يصل إليها الباحث عن طرق الحصر الشامل. بالإضافة إلى الخطأ الذى ينتج من عملية تعميم النتائج.

الاخطاء الاحصائية : Statistical Errors

يعُرفّ الخطأ احصائياً بأنه الفرق بين القيمة الحقيقية أو الدقيقة وبين القيمة المقدرة أو التقريبية لمفردة معينة، وذلك الخطأ يختلف عن خطأ القياس الذى هو خطأ نقع فيه نتيجة السهو أو الاهمال. فمثلاً إذا كان لدينا درجات خمس طلاب وأوجدنا متوسط الدرجات بأن جمعنا الدرجات للطلاب الخمسة ثم قسمنا المجموع على اربعة وليس على خمسة فهذا خطأ قياس وليس خطأ احصائى. أما الخطأ الاحصائى هو الذى يحدث ونعلم أنه موجود وليس هناك من وسيلة للتخلص منه كلية - ولكن كلما زادت معرفتنا الاحصائية كلما أمكننا تقليله.

والاخطاء الاحصائية نوعان :

الأول : خطأ التحيز :

ويرجع إلى :

١- تحيز جامع البيانات أو تحيز المبحوث لاجابات معينة لبعض الأسئلة أو الادلاء التقريبى للبيانات والذى عادة ما يهمل جزءاً كسرياً سواء فى الوزن أو الطول أو العمر أو عدد سنوات الزواج مثلاً . . . إلخ.

٢- الخطأ المتعمد من المبحوث أو الخطأ غير المقصود أثناء عملية الجمع ذاتها والعمليات التالية من تبويب وتصنيف . . . إلخ.

٣- قلة دراية جامع البيانات بأسلوب جمع وتسجيل البيانات بالاضافة إلى احتمال عدم أمانته حيث قد يلجأ إلى ملء الاستمارات أو صحيفة الاستبيان دون مقابلة المبحوثين فعلاً.

الثانى : خطأ المعاينة :

هو ذلك الخطأ الذى يرجع إلى استخدام أسلوب العينة دون الحصر الشامل فى عملية جمع البيانات حيث تختلف النتائج باختلاف العينة المسحوبة. . وكلما كان حجم العينة المسحوبة كبيراً كلما قل خطأ المعاينة والعكس صحيح حيث أن هناك علاقة عكسية بين حجم خطأ المعاينة وبين حجم العينة، أيضاً كلما زادت اختلافات وعدم تجانس مفردات المجتمع فيما بينها كلما توقعنا أن تكون العينة المسحوبة غير ممثلة لهذا المجتمع وبالتالى يزداد الفرق بين تقديرات العينة والقيمة الفعلية هذه المقدرات.

وكما سنعرف فيما بعد فان تلك الاختلافات وعدم التجانس بين مفردات المجتمع يقيسها مقياس التباين، وكلما زاد التباين كلما كان ذلك دليلاً على زيادة عدم التجانس وبالتالى زيادة خطأ المعاينة . . . اذن هناك علاقة طردية بين حجم خطأ المعاينة وحجم تباين المجتمع.

تمـــارين

١- عرف علم الاحصاء .

٢- ما المقصود بالمجتمع الاحصائى والعينة الاحصائية ممثلاً لكل منهما ؟

٣- لماذا نلجأ إلى استخدام أسلوب أخذ العينات الاحصائية فى بعض الدراسات؟

٤- اذكر أهم طرق جمع البيانات الاحصائية مع التعرض لأهم مميزات كل طريقة وعيوبها ؟

٥- ما هى أهم شروط صحة الاستمارة الاحصائية ؟

الباب الثانى

تنظيم البيانات وتلخيصها وعرضها

Presentation and Summarization Data

بعد الانتهاء من جمع البيانات بطريقة أو أكثر من الطرق السابقة فإنها تكون فى صورة غير معبرة، وقد يصعب استنتاج أى معلومات مفيدة منها. وقد تكون عبارة عن مجموعة أرقام غير مرتبة، أو مجموعة أوصاف لبعض الخصائص حسب ورودها فى الاستبيانات. ولتوضيح ذلك نعرض المثالين التاليين :

مثال (١):

عند دراسة الحالة الزواجية لعمال أحد المصانع أخذت عينة مكونة من ٤٠ عاملاً، وكانت النتائج كما يلى :

أعزب	متزوج	أعزب	أرمل	متزوج	أعزب	متزوج	مطلق	متزوج	أعزب
أرمل	متزوج	أعزب	متزوج	أعزب	متزوج	متزوج	أرمل	متزوج	متزوج
متزوج	أرمل	متزوج	مطلق	مطلق	متزوج	أرمل	متزوج	أعزب	مطلق
أرمل	متزوج	أرمل	متزوج	متزوج	أعزب	متزوج	متزوج	أعزب	متزوج

مثال (٢):

البيانات التالية تمثل الأجر اليومى بالجنية المصرى لعينة تتكون من خمسين عاملاً :

٢٥	٣٠	٣٨	٤٢	٥١	٣٤	٤٢	٥٤	٣٤	٤٢
٣٩	٤٠	٥٠	٢٦	٥٢	٣٨	٤٧	٣٥	٥٣	٢٨
٣٤	٤١	٣٥	٣١	٤١	٣٦	٥٣	٤١	٣٦	٣٢
٣٧	٤٤	٤٥	٣٧	٤٥	٤٦	٢٩	٤٦	٣٨	٤٨
٤٠	٣٣	٤٤	٤٥	٤٤	٤٠	٣١	٤٧	٤٣	٢٧

البيانات الواردة فى المثالين (١) ، (٢) السابقين لا يمكن الاستفادة منهما .. فى أية دراسة، وذلك لعدم وضوحهما، وصعوبة استنتاج أى معالم من الحالة الزواجية فى مثال (١)، والأجر اليومى فى مثال (٢)، فمثلاً لا يمكننا معرفة عدد المتزوجين بسهولة من بيانات مثال (١) بوضعها الحالى، وخاصة إذا كان العدد كبيرا. وكذلك الحال فى بيانات مثال (٢)، إذ لا نستطيع معرفة عدد العمال الذين يتقاضون أجرا أقل من ٣٥ جنيه أو أكثر من ٤٠ جنيه بمجرد الرجوع إلى البيانات فى وضعها الحالى.

لذلك أصبحت الحاجة إلى استحداث طريقة لتنظيم وتلخيص مثل هذه البيانات فى صورة سهلة ضرورية جداً، حتى يمكن دراستها، واستنتاج ما نريده منها بسهولة ويسر. ومن الطرق المستخدمة لتلخيص البيانات ما يسمى التوزيعات التكرارية Frequency Distributions. يتبقى علينا التمييز بين نوعين من البيانات الإحصائية حسب طبيعتها، حيث إن البيانات تنقسم عادة إلى نوعين أساسيين نعتمد عليهما فى عملية التنظيم والتلخيص، وهما :

١- البيانات الوصفية (الكيفية).

٢- البيانات الكمية (الرقمية).

وفيما يلى سنقوم بتعريف وشرح طريقة عمل جداول التوزيعات التكرارية لكل منهما.

١- البيانات الوصفية (الكيفية أو النوعية) *Qualitative Data*

يشار للبيانات الإحصائية بأنها وصفية إذا كانت تصف عناصر الظاهرة محل الدراسة فى صورة غير رقمية، مثل لون الشعر، أو لون البشرة، أو تقديرات النجاح للطلاب، أو الحالة الاجتماعية لمجموعة من العمال فى أحد المصانع مثل ما ورد فى مثال (١) أو غيرها من الظواهر الأخرى، ولتلخيص وتنظيم هذا النوع من البيانات نعمل على تكوين جدول مناسب يسمى جدول تفريغ البيانات ومنه نستنتج جدولاً آخر يسمى جدول

التوزيع التكرارى. ويتكون جدول تفريغ البيـانات عادة من ثلاثة أعمدة رأسية يكتب فى بداية كل عمود عنوانه المناسب، فمثلاً إذا كانت الدراسة هى تقديرات الطلاب فإننا يمكن أن نكتب كلمة (الصفـة) أو نكتب تقديرات الطلاب وهكذا . . . ثم يكتب تحت العنوان في العمود الأول كل الصفات، ففى مثال (١) تكون الصفات هى : أعزب - متزوج - أرمل - مطلق. ويكون عنوانها «الحالة الاجتماعيـة» للعمال أما فى العمود الثانى فيكون العنوان «علامات» وفـيه تسجل القراءات على شكل علامات، ونضع لكـل قراءة علامة أمام كل صفة من الصفات الموجودة فى العمود الأول. والعلامـة عبارة عن خط رأسى مثل «|» فإذا ما وصل عدد العـلامات إلى أربع مثل «||||» فإن الخط الخـامس يكتب مائل ليكون ما يسـمى الحزمـة على الصورة «~~||||~~» ويكون عـددها خمسـا. بعد تفـريغ كل البيانات تعـد الحزم أمام كل صفة، ويكتب الـعدد فى العمود الثالث الذى يسـمى عمود التكرارات، ويقصد بالتكرار عدد عناصر الظاهرة أمام كل صفة من الصفات الموجودة فى العمـود الأول. ومن هذا الجدول يصـاغ جدول التـوزيع التكرارى المكون من عـمودين الأول يشتمل على أسمـاء الصفات، والثـانى التكرارات. ففى مثـال (١) يكون جدول تفريغ البيانات كالتالى :

جدول (٢-١) : تفريغ البيانات للحالة الزواجية للعمال فى مثال (١)

الصفة	العـــلامـــات	التكرار (عدد العمال)
أعزب	~~||||~~ ||||	٩
متزوج	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	٢٠
أرمل	~~||||~~ ||	٧
مطلق	||||	٤
المجموع		٤٠

إذا حذفنا العمود الثانى من الجدول السابق لتفريغ البيانات فإننا نحصل على جدول مكون من عمودين يسمى جدول التوزيع التكرارى كما هو موضح بالجدول التالى :

جدول (٢-٢) : التوزيع التكرارى للحالة الزواجية للعمال فى مثال (١)

الصفة (الحالة الزواجية)	التكرار (عدد العمال)
أعزب	٩
متزوج	٢٠
أرمل	٧
مطلق	٤
المجموع	٤٠

يلاحظ كذلك أن يحتوى أى جدول إحصائى على عنوان يوضح نوعية الجدول، وطبيعة البيانات المعروضة فيه، كما هو موضح فى الجدولين السابقين.

٢- البيانات الكمية (الرقمية) Quantitative Data

هى البيانات الإحصائية التى تقاس فيها عناصر الظاهرة بمقياس كمى (رقمى) مثل أطوال مجموعة من الطلاب تقاس بالسم، أو أوزان مجموعة من الطلاب تقاس بالكجم، أو الأجور اليومية لمجموعة من العمال تقاس بالجنيه، ودرجات مجموعة من الطلاب تقاس بالدرجة وغيرها. . .، ولتنظيم هذه البيانات وتلخيصها لوضعها فى جدول تكرارى نكون أولاً جدولاً للتفريغ (مثل ما سبق فى حالة البيانات الوصفية) مع استبدال الصفة فى العمود الأول بما يسمى الفئات (classes) وقبل كتابة جدول التفريغ نلخص طريقة تكوين الفئات فى الخطوات التالية :

(أ) نحدد مدى البيانات، وهو عبارة عن الفرق بين أكبر قراءة وأصغر قراءة للبيانات

ومن مثال (٢) يكون المدى كالتالى :

المدى = أكبر قراءة - أصغر قراءة

= ٥٤ - ٢٥

= ٢٩ جنيه

(ب) يقسم المدى إلى عدد مناسب من الفئات وعادة يتراوح عدد الفئات من ٥ إلى ١٥ فئة تقريباً. وفى مثال (٢) نختار عدد الفئات، يساوى ٦ فئات مثلاً.

(جـ) نحسب طول الفئة، وهو يساوى المدى مقسوماً على عدد الفئات المختار، ويقرب الكسر الناتج من خارج القسمة إن وجد إلى العدد الصحيح مهما كانت قيمته، وذلك لجعل طول الفئة عدداً صحيحاً، ففى مثال (٢) السابق يكون

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات المقترح}}$$

$$= \frac{٢٩}{٦}$$

$$= ٤,٨٣$$

$$= ٥$$

(د) يحدد بداية الفئة الأولى (الصغرى) ويعرف بالحدالأدنى للتقريبى للفئة الأولى، وذلك باعتبار أصغر رقم فى البيانات، وكذلك يحدد بداية الفئة الثانية بإضافة طول الفئة إلى الحد الأدنى التقريبى للفئة الأولى، وهكذا بالنسبة لباقى الفئات الأخرى. أما بالنسبة لتحديد نهاية الفئة الأولى، أو ما يسمى الحد الأعلى التقريبى للفئة الأولى فإنه يمكن تعيينه بإضافة طول الفئة إلى بداية الفئة الأولى.

وباستخدام الخطوات السابقة يمكن تحديد فئات مثال (٢) السابق على النحو التالى:

(٢٥–٣٠)، (٣٠–٣٥)، (٣٥–٤٠) ، (٤٠–٤٥) ، (٤٥–٥٠) ، (٥٠–٥٥) وبذلك يكون جدول تفريغ البيانات الكمية التى وردت فى مثال (٢) السابق بالشكل التالى :

جدول (٢–٣) تفريغ البيانات لأجور العمال فى مثال (٢)

فئات الأجر	العلامات	التكرار (عدد العمال)
٢٥–	𝍸	٥
٣٠–	𝍸 |||	٨
٣٥–	𝍸 𝍸	١٠
٤٠–	𝍸 𝍸 |||	١٣
٤٥–	𝍸 |||	٨
٥٠–٥٥	𝍸		٦
المجموع		٥٠

ويمكن الحصول على الجدول التكرارى البسيط Simple Frequency Table للبيانات الكمية من الجدول السابق لتفريغ البيانات بأن نحذف عمود العلامات، وبذلك يصبح الجدول من عمودين الأول يمثل فئات الأجر، والثانى يمثل التكرارات لها، ويكتب كالتالى :

جدول (٢–٤) : التوزيع التكرارى لأجور العمال فى مثال (٢)

فئات الأجر	التكرار (عدد العمال)
٢٥–	٥
٣٠–	٨
٣٥–	١٠
٤٠–	١٣
٤٥–	٨
٥٠–٥٥	٦
المجموع	٥٠

ومن خلال هذا الجدول يتضح أن مجموع التكرارات يساوى عدد القيم الأصلية، ومن الملاحظ أن أطوال الفئات فى الجدول السابق أطوالاً متساوية ويطلق على هذا الجدول اسم الجدول التكرارى المنتظم، أما إذا كانت هناك فئة واحدة على الأقل مختلفة فى الطول من غيرها من الفئات الأخرى يطلق عليه الجدول التكرارى (غير المنتظم)، وعند العرض البيانى لهذه الفئات يجب الحصول على التكرار المعدل وتنقسم الجداول التكرارية أيضاً إلى جداول مغلقة وجداول مفتوحة.

١- **الجداول المغلقة (لها بداية ولها نهاية):** هى التى يكون الحد الأدنى للفئة الأولى والحد الأعلى الفئة الأخيرة معلومين مثلما هو كائن فى الجدول السابق. والجدول قد يكون مغلق ولكن أطوال فئاته غير متساوية مثال ذلك:

فئات	١٠-	١٥-	٢٥-	٤٠-	٦٠-٨٠
ك	١٠	٢٠	٢٥	١٥	١٠

فالجدول السابق له بداية (١٠) وهى الحد الأدنى للفئة الأولى وكذا له نهاية (٨٠) وهى الحد الأعلى للفئة الأخيرة. ولكن فئاته غير متساوية فالفئة الأولى طولها ٥ والثانية طولها ١٠ والثالثة طولها ١٥ والرابعة والخامسة طول كل منهما = ٢٠.

٢- **الجداول المفتوحة:** هى التي يكون الحد الأدنى للفئة الأولى غير معلوم أو الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معلوم، أو أن يكون الحدين السابقين غير معلومين (مجهولى الطرفين) ويجب أن نتحاشى انشاء جداول مفتوحة كلما كان ذلك من المستطاع حيث يترتب على الجدلول المفتوحة مشاكل عديدة وصعوبات فى العرض البيانى وأيضاً فى حساب بعض المقاييس الاحصائية ذات الأهمية حيث يتطلب استخدام هذه المقاييس أن تكون الجداول مغلقة والجدول قد يكون مفتوح من أعلى أو من أسفل أو من الطرفين.

أ- جدول مفتوح من أعلى : أى لا يوجد بداية للجدول والذى يوضحه عدم وجود الحد الأدنى للفئة الأولى مثال ذلك الفئات التالية :

فئات أقل من ١٠ ١٠- ٢٠- ٢٥- ٤٠- ٦٠-٩٠

أو فئات أقل من ٢٠ ٢٠- ٣٠- ٤٠- ٥٠- ٦٠-٧٠

ب- جدول مفتوح من أسفل: أى لا يوجد قيمة عليا للجدول بمعنى عدم وجود حد أعلى للفئة الأخيرة، مثال ذلك الفئات التالية :

فئات ١٠- ٢٥- ٣٠- ٤٨- ٥٥ فأكثر

أو فئات ٥- ١٠- ١٥- ٢٠- ٢٥ فأكثر

جـ- جدول مفتوح من الطرفين : أى لا يوجد تحديد لقيمة الحد الأدنى للفئة الأولى أو الحد الأعلى للفئة الأخيرة مثال ذلك الفئات التالية :

فئات أقل من ٢٠ ٢٠- ٣٠- ٦٠ فأكثر

أو فئات أقل من ١٠ ١٠- ٢٠- ٣٠ فأكثر

ويلاحظ أنه فى الجداول التكرارية التى محددا فيها الحدين الأعلى والأدنى للفئات المختلفة (جدول مغلق) يتطلب التعامل معها الحصول على مراكز الفئات المختلفة كالآتى :

$$\text{مركز الفئة } \textit{Midpoint} = \frac{\text{بداية الفئة + نهايتها}}{٢}$$

فإذا كانت الفئات ١٠- ٢٠- ٣٠- ٥٠-٦٠

فان مراكز الفئات (س) $\frac{١٠ + ٢٠}{٢} = ١٥$ $\frac{٢٠ + ٣٠}{٢} = ٢٥$ $\frac{٣٠ + ٥٠}{٢} = ٤٠$ $\frac{٥٠ + ٦٠}{٢} = ٥٥$

الجداول التكرارية المتجمعة *Cumulative Frequency Tables*

الجداول التكرارية البسيطة غير المتجمعة والتى سبق عرضها تعطى لنا معلومات

عن توزيع المفردات على الفئات المختلفة فتعـرف بذلك عدد المفردات فى كل فئة من هذه الفئات، ومع ذلك فقد نحتاج أحياناً إلى معـرفة معلومات تفصيلية أخرى كأن نرغب فى معرفة عدد المفردات التى تقل قيمتها أو تزيد عن قيمة معينة.

فئات	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	مجموع
تكرارات	٨	١٢	١٦	١٠	٤	٥٠

ففى الجدول السابق نجد أن ثمـانية طلاب تقل درجاتهم عن ٦٠ درجة، وأن ٢٠ طالب تقل درجاتهم عن ٧٠ درجـة، وهنا جمعنا عـدد الطلاب فى الفئة الأولى والفـئة الثانيـة (أى مجموع التكرارات فى الفـئتين الأولى والثانية) كـما تبين أن ١٤ طالب يبلغ درجاتهم ٨٠ درجة أو أكـثر. وهو مجمـوع تكرارات الفئتين الأخيرتين ولـلحصول على مثل هـذه المعلومات تقـوم بتجـميع التكرارات فى جـدول يطلق عليه الجـدول التكرارى المتجمع. وتنقسم الجداول التكرارية المتجمـعة إلى نوعين جدول تكرارى متجمع صاعد، وجدول تكرارى متجمع هابط.

١- **الجدول التكرارى المتجمع الصاعد** ***Ascending Cumulative Frequency*** :

يتكون هذا الجـدول من عـمودين الـعمـود الأول وتذكـر الفئـات على الصـورة الآتية: أقل من (*less than*) الحد الأعلـى للفئات والعـمود الثـانى التكرارات المتجمعـة الصاعدة. ويستخدم إذا كان المطلوب هو مـعرفة المفردات التى تقل عن قيمة معينة.

٢- **الجـدول التكـرارى المتـجـمع الهـابط أو النازل** ***Descending Cumulative Frequency*** : يتكون هذا الجدول مـن عمودين العـمود الأول وتذكر الفـئات على الصورة الاتيـة : الحد الأدنى للفئات فـأكثر (*or more*) ويتضمـن العمود الثانى التكرارات المتـجمعة الهابـطة ويتم اعداده إذا كان المطلوب هو معـرفة عدد المفردات التي تبلغ قيمة معينة أو تزيد عنها.

من المثال السابق يمكن عمل التوزيعين التكرارين المتجمعين الصاعد والهابط.

جدول (٢-٥) : التوزيع المتجمع الصاعد

فئات المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٥٠	صفر
أقل من ٦٠	٨
أقل من ٧٠	٢٠
أقل من ٨٠	٣٦
أقل من ٩٠	٤٦
أقل من ١٠٠	٥٠

جدول (٢-٦) : التوزيع المتجمع الهابط

فئات المتجمع الهابط	التكرار المتجمع الهابط
٥٠ فأكثر	٥٠
٦٠فأكثر	٤٢
٧٠ فأكثر	٣٠
٨٠ فأكثر	١٤
٩٠ فأكثر	٤
١٠٠ فأكثر	صفر

ومن الملاحظ أن الجداول التكرارية الصاعدة أو الهابطة لا تتأثر بانتظام أوعدم انتظام الفئات أى يمكن إيجاد الجداول التكرارية الصاعدة والهابطة من الجداول التكرارية المنتظمة وغير المنتظمة.

الجدول التكراري النسبي Relative Frequency Table :

الجداول التكرارية التى استعرضنا انواعها يمكن تمثيلها فى صورة جداول تكرارية نسبية يتم تحويل التكرارات المطلقة لكل فئة إلى تكرارات نسبية.

$$\text{التكرار النسبى لفئة ما} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

فمثلاً للجدول التكرارى التالى يتم تكوين التكرار النسبى كالآتى :

جدول (٢-٧) : الجدول التكرارى النسبى

فئات	التكرار	التكرار النسبى	
-١٠	١٥	١٥ ÷ ١٠٠ =	٠,١٥
-٢٠	٢٠	٢٠ ÷ ١٠٠ =	٠,٢٠
-٣٠	٣٠	٣٠ ÷ ١٠٠ =	٠,٣٠
-٤٠	٢٥	٢٥ ÷ ١٠٠ =	٠,٢٥
٥٠-٦٠	١٠	١٠ ÷ ١٠٠ =	٠,١٠
	١٠٠		١

لاحظ أن مجموع التكرارات النسبية = واحد صحيح وذلك صحيح لجميع الجداول التكرارية أيا كان مجموع تكراراتها المطلقة.

الجداول التكرارية الثنائية او المزدوجة Double or Bivariate Frequency Tables

فى بعض الأحيان تكون البيانات لأكثر من متغير للوحدات محل الدراسة الإحصائية. فإذا كان لدينا مجموعة من الطلاب ونرغب فى دراسة ظاهرة الطول وظاهرة الوزن فيهم أو دراسة درجات اختبارين لمادتين مختلفتين لهم أيضاً. أو دراسة الأجور والإنتاج لمجموعة من العمال فى إحدى المؤسسات. ففى مثل هذه الحالات فإنه يلزم منا عمل جداول توزيع تكرارية مزدوجة تظهر فيها تكرار كل من الظاهرتين محل الدراسة، وفى الجداول التكرارية المزدوجة تكتب حدود الفئات فى وضع رأسى للظاهرة الأولى وحدود الفئات للظاهرة الثانية في وضع أفقي. ويكون الجدول المزدوج عبارة عن شبكة من المربعات أو مصفوفة (*Matrix*) فى صورة صفوف أفقية وأعمدة رأسية ويكتب

التكرار المشترك للظاهرتين داخل هذه المربعات بحيث يكون بداية الصف هو الحد الأدنى لفئة الظاهرة الأولى وبداية العمود هو الحد الأدنى لفئة الظاهرة الثانية وفى نهاية كل من الصف والعمود يكتب مجموع التكرار لكل من الصف والعمود وبذلك تكون التكرارات الرأسية فى خانة المجموع تمثل تكرارات الظاهرة الأولى والتكرارات الأفقية فى خانة المجموع تمثل التكرارات للظاهرة الثانية ونوضح ذلك بالمثال التالى.

مثال:

الجدول الآتى يمثل درجات ٣٠ طالب فى كل من مادتى الاحصاء والاقتصاد والمطلوب عمل جدول توزيع تكرارى لهذه البيانات.

رقم المفردة	درجات الاحصاء	درجات الاقتصاد
١	٦٢	٧٠
٢	٨٥	٨٢
٣	٧٥	٧٩
٤	٦٨	٧١
٥	٦٠	٦٣
٦	٨٢	٨٣
٧	٥٢	٥٦
٨	٧٥	٧٣
٩	٩٢	٩١
١٠	٧٠	٧٥
١١	٧٧	٧٨
١٢	٩٦	٩٤
١٣	٥١	٦٢
١٤	٧٥	٧٣
١٥	٥٧	٦٠
١٦	٥٠	٥٣
١٧	٩٢	٩٠
١٨	٦٠	٦٠
١٩	٧٥	٧٩
٢٠	٥٥	٥٠
٢١	٧٢	٧٠
٢٢	٩٠	٦٧
٢٣	٨١	٨٤
٢٤	٦٥	٦٢
٢٥	٧٣	٧٧
٢٦	٦٨	٦٤
٢٧	٩٨	٩٢
٢٨	٦٤	٧٢
٢٩	٩٣	٩٧
٣٠	٥٥	٦١

عند عمل جدول التـفريغ المزدوج يجب تحديد عدد الفـئات وأطوالها لكل ظاهرة من الظاهرتين بنفس الطريقة السابقة بأن تحدد المدى ثم تحدد عدد الفئات ثم نحصل على طول كل فئة.

ففى هذا المثـال نجد أن الحد الأدنى لدرجات الطلاب فى مـادة الاحصاء هى ٥٠ والحد الأعلى ٩٨ . وبذلك يكون المدى ٩٨ - ٥٠ = ٤٨

ويمكن تحدد عدد الفئات بخمس فـئات فتصبح طول الفئة = $\frac{٤٨}{٥}$ = ٩,٦ وتقرب إلى ١٠، ويكون حدود الفئات كالآتى : ٥٠ - ٦٠ - ٧٠ - ٨٠ - ٩٠ - ١٠٠

وبالنسبـة لدرجات الطلاب فى مادة الاقتـصاد نجد أن الحد الأدنى لهـا ٥٠ درجة والحـد الأعلى ٩٧ وبذلك يكون المدى ٩٧ - ٥٠ = ٤٧ . فـإذا كانت عـدد الفئـات ٥ فئات فـإن طول الفئة = $\frac{٤٧}{٥}$ = ٩,٤ وتقرب إلى ١٠ ، وتصـبح حدود الفئـات أيضاً ٥٠ - ٦٠ - ٧٠ - ٨٠ - ٩٠ - ١٠٠

بعد إنشاء الجدول المزدوج لتفريغ درجـات الطلاب فى مادتى الاحصاء والاقتصاد نوضع علامات فى الخلايا، فالطالب الأول درجتـه فى الاحصاء ٦٢، وفى الاقتصاد ٧٠ نلاحظ أن درجة الاحـصاء تقع فى الفـئة الثانيـة من فئـات درجات الاحصـاء، ودرجة الاقتصاد تقع فى الفئة الثالثة من فئـات درجات الاقتصاد، لذلك نضع العلامة فى الخلية التى تلتقى فيها الفئـة الثانية من فئات الاحصاء ٦٠، مع الفئة الثالثـة من فئات الاقتصاد ٧٠، وهكذا يستمر التفريغ حتى ننتهى من تفريغ جميع أزواج القيم.

جدول (٢-٨) : تفريغ درجات ٣٠ طالب فى مادتى الاحصاء والاقتصاد

الاقتصاد / الاحصاء	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	المجموع
٥٠-	III	III				٦
٦٠-		IIII	III			٧
٧٠-			𝍸 III			٨
٨٠-				III		٣
٩٠-١٠٠		I			𝍸	٦
المجموع	٣	٨	١١	٣	٥	٣٠

ثم نجمع التكرارات أمام الفئات أفقياً ورأسياً، وبعد الانتهاء من جدول التفريغ المزدوج يصاغ الجدول التكرارى المزدوج منه باستبدال العلامات فى جدول التفريغ بعددها.

جدول (٢-٩) : تفريغ درجات ٣٠ طالب فى مادتى الاحصاء والاقتصاد

الاقتصاد / الاحصاء	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	المجموع
٥٠-	٣	٣				٦
٦٠-		٤	٣			٧
٧٠-			٨			٨
٨٠-				٣		٣
٩٠-١٠٠		١			٥	٦
المجموع	٣	٨	١١	٣	٥	٣٠

ومن هذا الجدول التكرارى المزدوج يمكن أن نحصل على جداول تكرارية بسيطة فإذا أخذنا العمود الأول والعمود الأخير يصبح لدينا جدول تكرارى لدرجات الطلاب فى مادة الاحصاء، ولو أخذنا الصف الأول والصف الأخير يصبح لدينا جدول تكرارى لدرجات الطلاب فى مادة الاقتصاد.

جدول تكرارى لدرجات الطلاب فى الاحصاء

الدرجة	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	المجموع
عدد الطلاب	٦	٧	٨	٣	٦	٣٠

جدول تكرارى لدرجات الطلاب فى الاقتصاد

الدرجة	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	المجموع
عدد الطلاب	٣	٨	١١	٣	٥	٣٠

ويطلق على كل توزيع من التوزيعين اسم التوزيع الهامشى، الأول يطلق عليه التوزيع الهامشى لمادة الاحصاء، والثانى يسمى التوزيع الهامشى لمادة الاقتصاد.

ومن الملاحظ انه فى الجداول التكرارية المزدوجة لا يشترط أن تكون بيانات الظاهرتين كمية أو بيانات الظاهرتين وصفية أو نوعية ولكن يمكن أن تكون بيانات الظاهرة الأولى وصفية وبيانات الظاهرة الثانية كمية

كما لا يشترط فى الجدول التكرارى المزدوج للبيانات الكمية أن يكون عدد الفئات للظاهرتين متساوى أو يكون الحد الأدنى والأعلى لفئات الظاهرتين متماثلين.

العرض أو التمثيل البيانى Graphical representation :

لقد تكلمنا عن طرق تنظيم وتلخيص البيانات وعرضها جدولياً وقد لاحظنا أن عرض البيانات فى صورة جداول تكرارية تعطى صورة شاملة واضحة عن البيانات الأولية وتوزيعاتها التكرارية. ومع ذلك فإن عرض الجداول التكرارية بالتمثيل البيانى تعطى فكرة أوضح وأسرع عن أشكال التوزيعات التكرارية وبذلك يمكن عرض التوزيعات

التكرارية بيانياً باستخدام :

* المدرج التكرارى (*Histogram*).
* المضلع التكرارى (*Frequency Polygon*).
* المنحنى التكرارى (*Frequency Curve*).
* المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والهابط (*Cumulative Frequency Curve*)

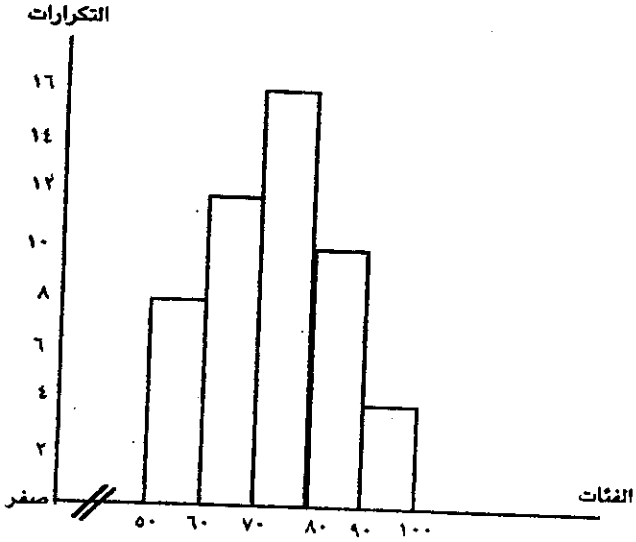
١- المدرج التكرارى *Histogram* :

لرسم المدرج التكرارى (فى حالة الجداول المنتظمة) نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقى والآخر رأسى، حيث نأخذ المحور الأفقى لتمثيل الفئات والمحور الرأسى لتمثيل التكرارات، ونظراً لأن الجدول منتظم والفئات متساوية فاننا نقسم المحور الأفقى إلى أقسام متساوية، عدد هذه الأقسام يساوى عدد الفئات ثم نقوم بتدريج المحورالرأسى حسب مقياس رسم مناسب بحيث يسمح بظهور قيمة أكبر تكرار فى الجدول، ثم نرسم مستطيلات متلاصقة على كل فئة مستطيلاً رأسياً - قاعدته طول الفئة وارتفاعه يتناسب مع التكرار المقابل لهذه الفئة، ويسمى هذا الشكل الذى يتألف من المستطيلات المتلاصقة بالمدرج التكرارى.

مثال:

من التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالب فى مادة الاحصاء ارسم المدرج التكرارى.

الفئة	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	المجموع
التكرار	٨	١٢	١٦	١٠	٤	٥٠



شكل (٢-١) : المدرج التكرارى لدرجات ٥٠ طالب فى مادة الاحصاء

نلاحظ على هذا الرسم :

أ- يمكن أن يبدأ التقسيم للفئات على المحور الأفقى من تقاطع المحورين أو من نقطة أخرى على يمين التقاطع.

ب- مساحة المستطيلات تتناسب مع ارتفاعها حيث أن القاعدة ثابتة بالنسبة لجميع الفئات، أى أن النسبة بين مساحات المستطيلات المرسومة على الفئات تساوى النسبة بين ارتفاعاتها.

جـ- عندما يكون الجدول التكرارى مقفول أو مغلق فإننا نرسم المستطيلات على الفئات من أول فئة إلى آخرها، أما إذا كان الجدول مفتوحاً من أحد طرفيه أومن كليهما فلا يمكن رسم مستطيل على الفئة المفتوحة لعدم معرفة طول القاعدة التى نرسم عليها، ولهذا نهمل عادة الفئات المفتوحة ونشير إلى ذلك فى أسفل الرسم وفى بعض الأحيان يمكن تقدير طول الفئة المفتوحة وهنا يمكن رسم المستطيل.

د- المدرج التكرارى يصلح لتمثيل المتغيرات المتصلة ولا يصلح لتمثيل المتغيرات غير المتصلة.

المدرج التكرارى لبيانات (لفئات) غير منتظمة :

لقد سبق أن أشرنا إلى أن البيانات إما أن تكون منتظمة أى أن الفئات متساوية أو أن تكون البيانات غير منتظمة أى أن الفئات ليست متساوية الأطوال، ولذلك عند رسم المدرج التكرارى من البيانات المنتظمة كانت قواعد المستطيلات متساوية أطوال الفئات ولذلك كانت النسب بين ارتفاعات المستطيلات تكون مساوية للنسب بين التكرارات، وهذه تساوى المساحات طالما أن قاعدة المستطيل تساوى الوحدة لذلك كنا نرسم المستطيلات على الفئات بحيث تكون ارتفاعاتها مساوية لقيمة التكرارات المناظرة لقواعدها (الفئات) أما إذا لم تكن الفئات متساوية الطول (بيانات غير منتظمة) تكون مساحات هذه المستطيلات (القاعدة × الارتفاع) مناسبة مع التكرارات، ونظراً لأن الفئات (القواعد) غير متساوية الأطوال فلا ينبغى لنا فى هذه الحالة أن نرسم على الفئات ذات الأطوال المختلفة مستطيلات تتناسب ارتفاعاتها مع التكرارات (كما هو الحال فى الفئات المتساوية) لذلك كان لابد من تعديل التكرارات بحيث تتناسب ارتفاعات المستطيلات مع التكرارات المعدلة، ونحصل على التكرار المعدل على النحو التالى :

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{التكرار الأصلى}}{\text{طول الفئة}}$$

وعلى ذلك فنقوم برسم المستطيلات بحيث يتناسب ارتفاعاتها مع التكرار المعدل.

مثلاً إرسم المدرج التكرارى للبيانات الآتية :

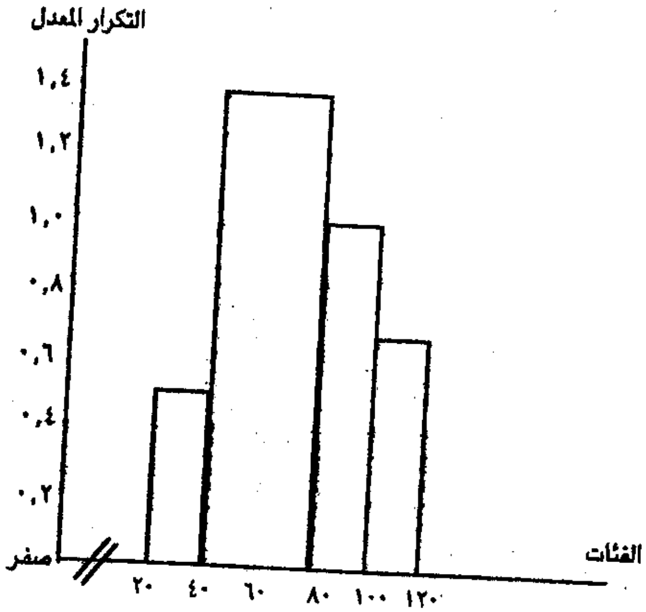
الفئة	٢٠-	٤٠-	٨٠-	١٠٠-١٢٠	المجموع
التكرار	١٠	٥٥	٢٠	١٥	١٠٠

بالنظر إلى هذه البيانات نجد أن الفئات ليست متساوية (غير منتظمة) لذلك قبل رسم المدرج التكرارى ينبغى الحصول على التكرار المعدل.

جدول (٢-١٠) : الجدول التكرارى المعدل

الفئة	التكرار	طول الفئة	التكرار المعدل
-٢٠	١٠	٢٠	٠,٥
-٤٠	٥٥	٤٠	١,٣٧٥
-٨٠	٢٠	٢٠	١
١٠٠-١٢٠	١٥	٢٠	٠,٧٥
المجموع	١٠٠		

ثم نقوم برسم المدرج التكرارى بحيث تكون قواعد المستطيلات تتماثل مع أطوال الفئات وارتفاع المستطيلات تتناسب مع التكرار المعدل.



شكل (٢-٢) : المدرج التكرارى

المضلع التكرارى Frequency Polygon :

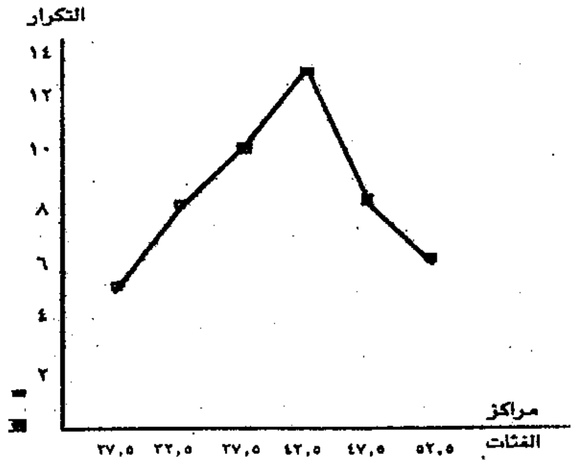
يُرسم المضلع التكرارى بنفس طريقة عمل المدرج التكرارى، وذلك على محورين متعامدين، الأفقى يمثل الفئات بحدودها الفعلية (مراكزها)، والرأسى يمثل التكرارت، وبدلاً من رسم مستطيلات فى المدرج التكرارى توضع نقطة فوق مركز الفئة ارتفاعها يمثل تكرار تلك الفئة. وبعد الانتهاء من تمثيل النقط لجميع الفئات نصل بالمسطرة كل نقطتين متجاورتين فنحصل على المضلع التكرارى المفتوح.

ويمكن استخدام المضلع التكرارى فى المقارنة بين توزيعين تكراريين وذلك بتمثيلهما بيانياً على نفس المحورين الأفقى والرأسى وذلك لأن المضلع التكرارى يعطى فكرة إجمالية عن الظاهرة موضوع الدراسة.

ومن بيانات الجدول التالى :

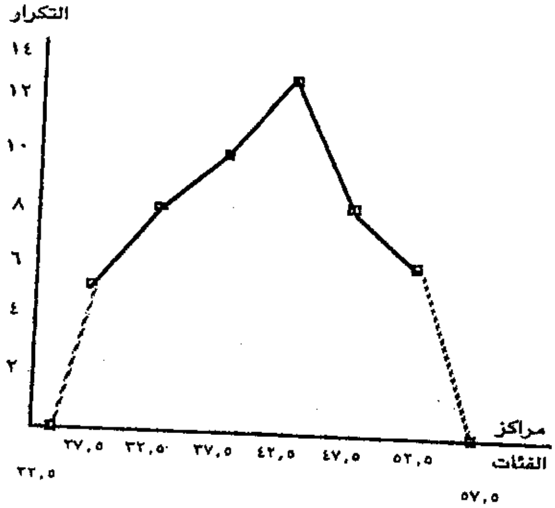
الفئة	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-٥٥
التكرار	٥	٨	١٠	١٣	٨	٦

يتم عرض المضلع التكرارى كالآتى :



شكل (٢-٣) : المضلع التكرارى المفتوح

ولغلق المضلع التكرارى مع المحور الأفقى الممثل لمراكز الفئات للأجور نقيس مسافة تساوى طول الفئة الدنيا، ونضع نقطة على يسار مركز الفئة الدنيا ولتكن على المحور الأفقى، وكذلك نقيس مسافة تساوى طول الفئة العليا ونضع نقطة على يمين مركز الفئة العليا على المحور الأفقى، ثم نصل بالمسطرة كلا من النقطتين اللتين على المحور الأفقى بالنقاط المجاورة لها فى المضلع. وبذلك نحصل على غلق المضلع التكرارى كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (٢-٤) المضع التكرارى المغلق

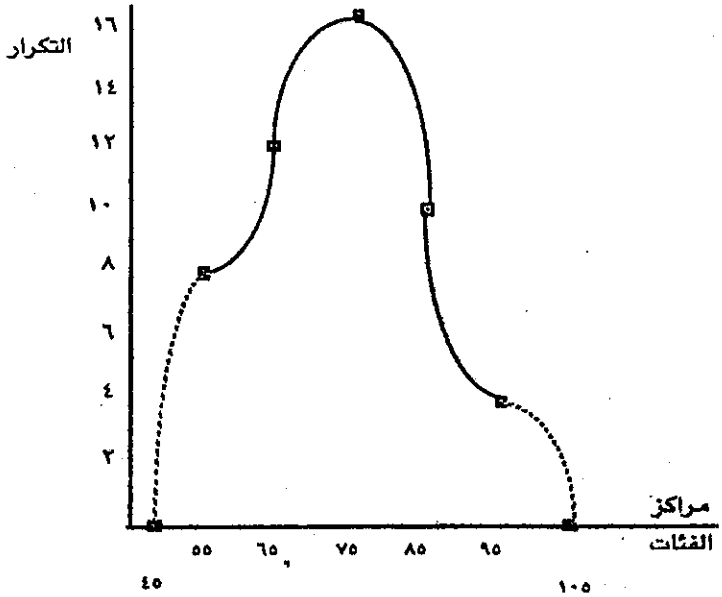
٣- المنحنى التكرارى : *Frequency Curve*

يُرسم المنحنى التكرارى على محورين متعامدين أحدهما أفقى يمثل مراكز الفئات والآخر رأسى يمثل التكرارات ثم نحدد النقاط أعلى مراكز الفئات وتوازى تكرار الفئة أى أن إحداثيها الأفقى مركز الفئة، واحداثيها الرأسى هى التكرار المناظر للفئة وذلك مثلما اتبع عند رسم المضلع التكرارى مع اختلاف أن هذه النقاط فى المضلع التكرارى يتم توصيلها بمستقيمات. أما فى المنحنى التكرارى يتم توصيل هذه النقاط عن طريق التمهيد

باليد ولا يشترط أن يمر المنحنى بجميع هذه النقاط مثلما كان الحال فى المضلع التكرارى وهذا التمهيد باليد قد يختلف من فرد إلى آخر ونتيجة عدم التقيد بالنقاط تقيداً تاماً عند رسم المنحنى التكرارى فإن المساحة الواقعة تحت المنحنى قد لا تكون مساوية للمساحة تحت المضلع التكرارى.

مثلاً ارسم المنحنى التكرارى للبيانات الآتية :

الفئة	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠
التكرار	٨	١٢	١٦	١٠	٤



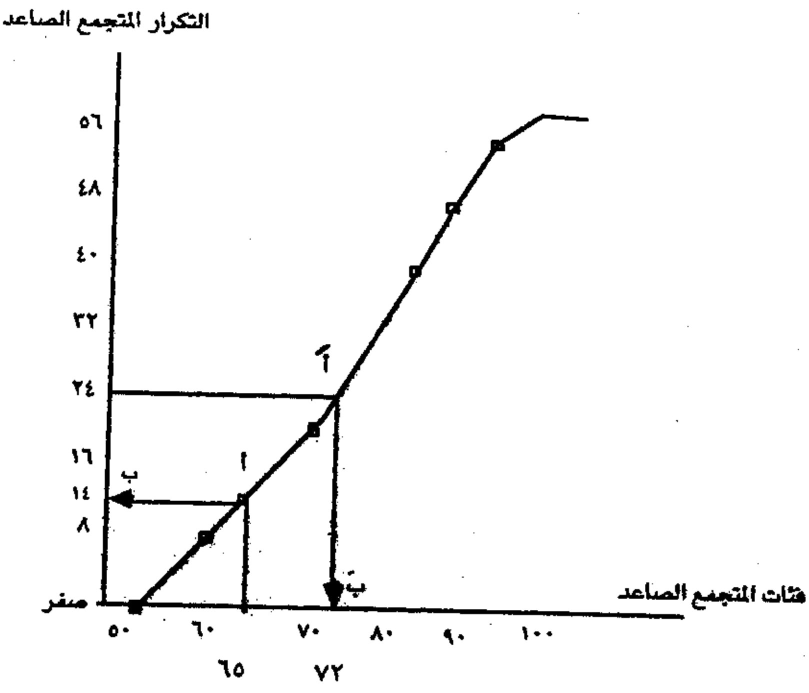
شكل (٢-٥) : المنحنى التكرارى

٤- المنحنى التكرارى المتجمع *Cumulative Frequency Curve*

لقد سبق أن عرضنا الجداول التكرارية المتجمعة (الصاعدة والهابطة) ولتمثيل هذين الجدولين بيانياً، فإننا نقوم برسم منحنى متجمع صاعد، ومنحنى متجمع هابط،

ولرسم المنحنى المتجمع الصاعد نقوم برسم محورين متعامدين الأفقى يمثل فئات المتجمع الصاعد والرأسى يمثل التكرارات المتجمعة الصاعدة، بحيث يقسم المحور الأفقى إلى تقسيمات متساوية تأخذ عليها فئات المتجمع الصاعد، وأن نقسم المحور الرأسى أيضاً إلى تقسيمات وفقاً لمقياس رسم بحيث يتسع المحور الرأسى للمجموع الكلى للتكرارات، ثم نضع النقاط بحيث تكون أعلى فئات المتجمع الصاعد وموازية للتكرار المتجمع الصاعد ونستمر فى وضع النقاط حتى نصل إلى المجموع الكلى للتكرارات ثم نصل بين هذه النقاط بمنحنى ممهد فنحصل على المنحنى المتجمع الصاعد.

من المثال السابق للبيانات الخاصة بدرجات ٥٠ طالب فى مادة الاحصاء نقوم برسم منحنى متجمع صاعد. *Ascending Cumulative Frequency Curve*



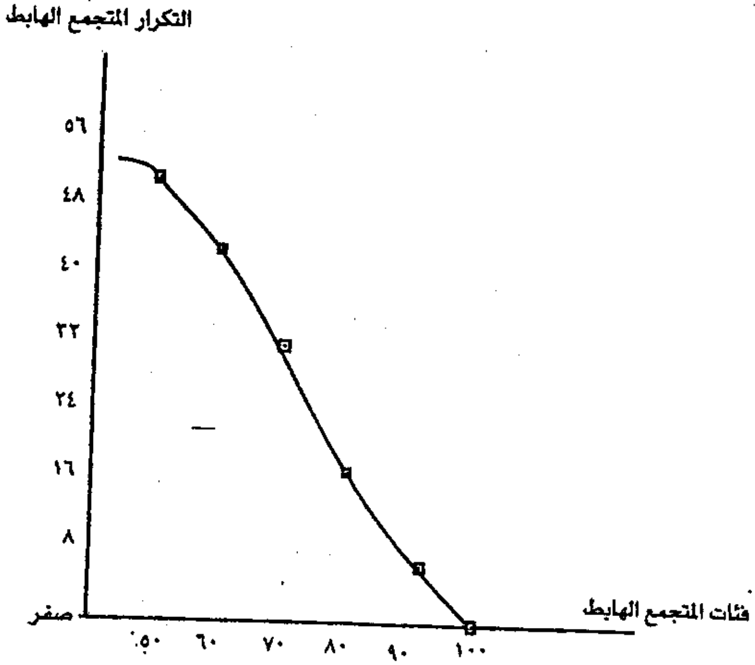
شكل (٢-٦) : المنحنى المتجمع الصاعد

ومن هذا المنحنى يمكن الحصول على بعض المعلومات عن الطلاب بخلاف ما ورد فى الجدول التكرارى المتجمع الصاعد فإذا أردنا معرفة عدد الطلاب الذين تقل درجاتهم عن ٦٥ درجة فإننا نقيم عموداً على المحور الأفقى عند النقة ٦٥ حتى يقابل المنحنى المتجمع الصاعد فى نقطة معينة (أ) ثم نرسم منها عموداً على المحور الرأسى ولتكن (ب) وهذه النقطة هى التى تحدد عدد الطلاب (١٤ طالب).

وإذا أردنا معرفة الحد الأعلى لدرجات ٢٤ طالب فإننا نقيم عموداً على المحور الرأسى عند النقطة ٢٤ وعند التقائه بالمنحنى المتجمع الصاعد عند النقطة (أ) نسقط منها عموداً على المحور الأفقى فيلتقى به عند النقطة (ب) وهذه النقطة هى التى تحدد الحدالأعلى لدرجات الطلاب المذكورين ٧٢ درجة.

بنفس أسلوب رسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد يمكن رسم المنحنى التكرارى المتجمع الهابط *Descending Cumulative Frequency Curve* بأن نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقى يمثل فئات المتجمع الهابط والآخر رأسى ويمثل التكرارات المتجمعة الهابطة ثم نعين النقاط بحيث تكون أعلى فئات المتجمع الهابط وموازية للتكرار المتجمع الهابط ثم نصل هذه النقاط بمنحنى ممهد باليد فنحصل على المنحنى المتجمع الهابط.

ونلاحظ عند رسم المنحنى المتجمع الصاعد أو الهابط لتوزيع فئات غير متساوية لايستدعى تعديل التكرارت. من المثال السابق للبيانات الخاصة بدرجات ٥٠ طالب فى مادة الاحصاء نرسم المنحنى المتجمع الهابط.



شكل (٢-٧) : المنحنى المتجمع الهابط

ويمكن رسم المنحنى المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع الهابط في شكل واحد باستخدام نفس مقياس الرسم.

الرسوم والأشكال البيانية :

كثير من الحكومات والهيئات والمؤسسات العامة ترغب عادة في توضيح مظاهر التطور الذي تقوم به في المجالات المختلفة مثل التعليم والصناعة والزراعة والصحة ... وذلك في صورة يمكن للشخص العادي استيعابها بسهولة، وأفضل وسيلة لذلك الرسوم البيانية. ومن فوائد الرسوم البيانية أنها تعطي فكرة سريعة عن تطور الظاهرة محل الدراسة، أو تغيرها بصورة عامة وذلك بصورة سهلة وشيقة، وتجيب عن معظم الاستفسارات المطلوبة بعيداً عن الحسابات الرقمية. من أهم الطرق التي سوف نستعرضها

الخط البيانى والأعمدة البيانية والرسوم الدائرية، وسوف نتناول كلاً من هذه الطرق بشيء من التفصيل فيما يلى :

١- الخط البيانى Line Chart "Graph" Diagram

هو عبارة عن خط منكسر يمثل مسار البيانات، وغالباً ما يستخدم الخط البيانى فى حالة المشاهدات لفترات زمنية حيث إن المحور الأفقى يمثل الزمن، والمحور الرأسى يمثل قيم المشاهدات. والأمثلة على ذلك كثيرة منها : دراسة تطور التعليم فى مصر خلال فترة زمنية أو تطور عدد المصانع خلال فترة زمنية. ولتوضيح ذلك نورد المثال التالى :

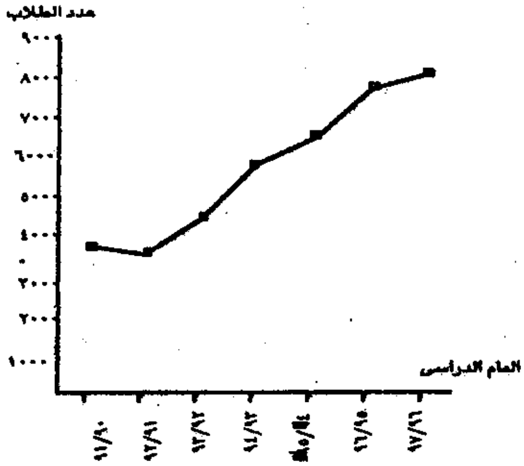
مثال :

الجدول التالى يمثل عدد الطلاب الذى التحقوا باحدى الكليات بجامعة عين شمس خلال الفترة من عام ٩٠/ ٩١ حتى ٩٦/ ٩٧.

العام الدراسى	٩١/٩٠	٩٢/٩١	٩٣/٩٢	٩٤/٩٣	٩٥/٩٤	٩٦/٩٥	٩٧/٩٦
عدد الطلاب	٣٩٠٧	٣٧٨٢	٤٣٦٩	٥٧٤٥	٦٧١٠	٧٨٥٠	٨١٣٩

مثّل هذه البيانات باستخدام الخط البيانى

يمكن تمثيل البيانات كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (٢-٨) : الخط البيانى لاعداد الطلاب

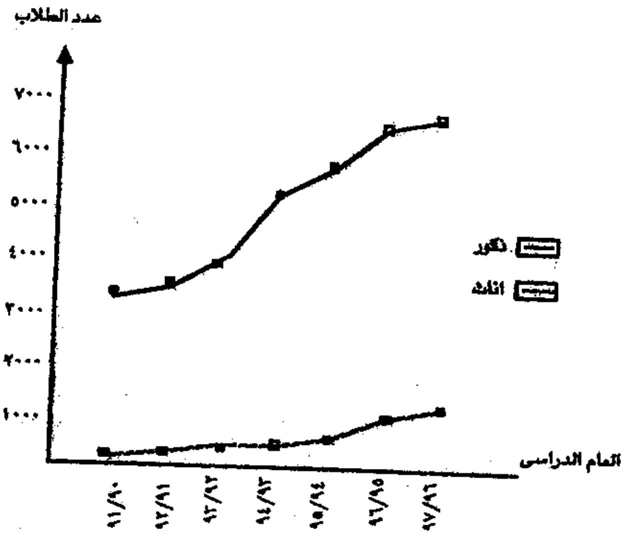
وإذا كان لدينا ظاهرتان أو أكثر، وكانت قيم المشـاهدات فى الفترات الزمنية نفسها فـإنه يمكن تمثيل كل ظاهرة منـها بخـط بيـانى بلون يخـتلف فى كل واحـدة منهـا عن الأخرى، أو بخط مستمر للظاهرة الأولى، وبخط متقـطع للظاهرة الثانية، كما يتضح من المثال التالى :

مثال:

فيما يلى جـدول يمثل عدد الطلاب الملتحقين باحدى الكليات بجـامعة عين شمس خلال الفترة من عام ٩٠/٩١ حتي عـام ٩٦/٩٧ وذلك حسب الجنس مثل هذه البيانات بواسطة الخط البيانى.

العام الدراسى	٩٠/٩١	٩١/٩٢	٩٢/٩٣	٩٣/٩٤	٩٤/٩٥	٩٥/٩٦	٩٦/٩٧
ذكور	٣٣٤٨	٣٥٢٧	٤٠٩٦	٥٢٤٠	٥٨٩٢	٦٦٦٥	٦٧٤٥
إناث	٢٥٩	٢٥٥	٢٧٣	٥٠٥	٨١٨	١١٨٥	١٣٩٤

يمكن تمثيل البيانات كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (٢-٩) : الخطوط البيانية لاعداد الطلاب والطالبات

٢- الأعمدة البيانية Bar Chart "Graph" Diagram :

من أفضل الطرق البيانيـة وأوضحها، وهى عبارة عن مستطيـلات رأسية كل منها ذو سمك منـاسب ومتسـاو، وارتفاعـاتها تمثل قيـم المشاهدات للظاهرة محل الدراسة، وتكون هذه المستطيلات على أبعاد متساوية فيما بينها وسوف نعرض منها بالأمثلة كلا من الأعمدة البسيطة، والأعمدة المزدوجة (المتلاصقة)، والأعمدة المجزأة فيما يلى.

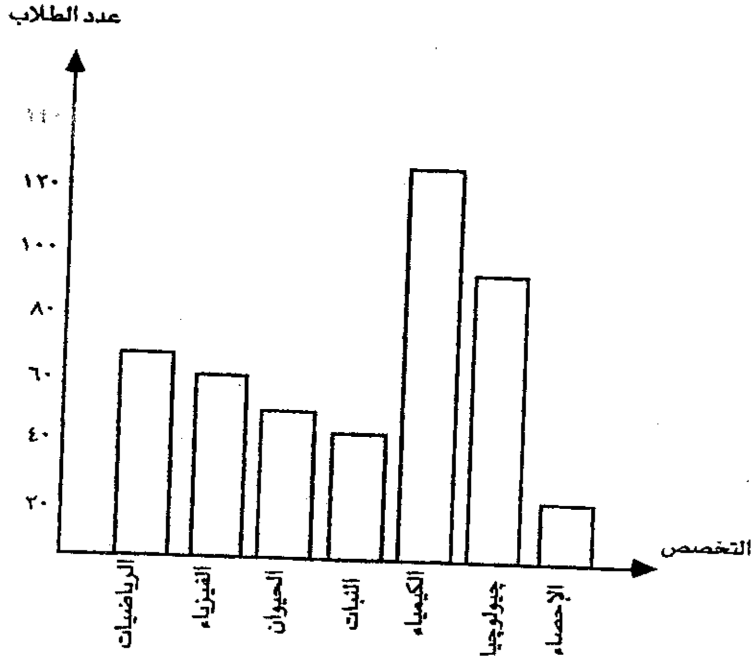
أ- الأعمدة البيانية البسيطة :

وتستـخدم لتمـثيل قيم المشـاهدات لظاهرة واحدة محل الدراسـة وقد تكون هذه المشاهدات مقاسة بالنسبة للزمن أو غير ذلك.

مثال :

الجدول التالـى يبين عدد الطلاب الذين التحقـوا بكلية العلوم جامعـة عين شمس خلال عام ٩٦/٩٧ وذلك حـسب التخصص مثل هذه البـيانات بواسطة الأعمدة البـيانية البسيطة.

التخصص	الرياضيات	الفيزياء	الحيوان	النبات	الكيمياء	الجيولوجيا	الإحصاء
عدد الطلاب	٧٧	٦٤	٤٧	٤٤	١٣٠	٩٨	٢٤



شكل (٢-١٠) : الأعمد البيانية البسيطة لأعداد الطلاب حسب التخصص فى كلية العلوم

ب- الأعمدة البيانية المزدوجة (المتلاصقة):

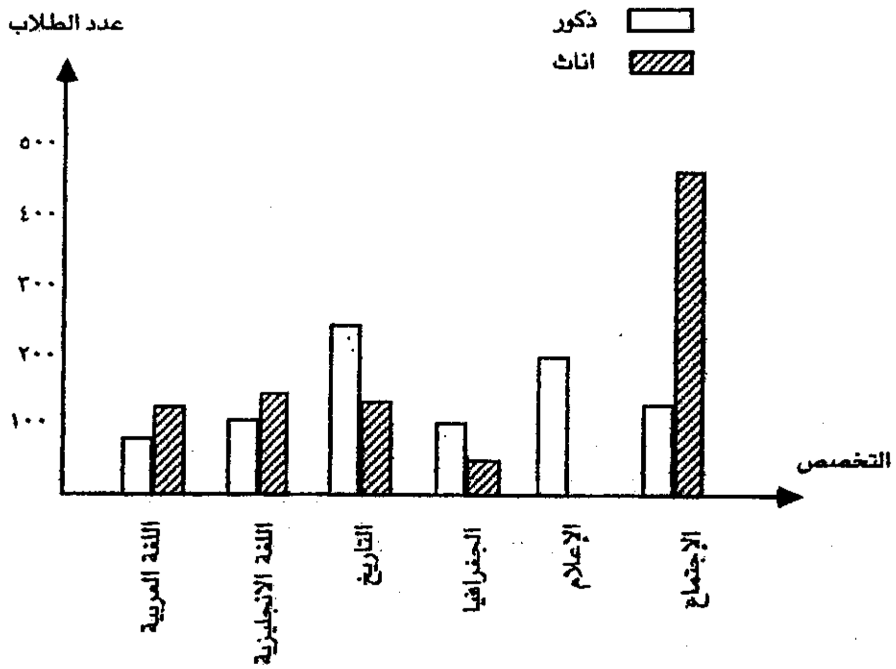
تستخدم الأعـمدة البيانية المزدوجة إذا أردنا المقارنة بين ظاهرتين أو أكـثر كالمقارنة بين عدد طلاب الجامعـة، وعدد الطالبات بالجامعة أيضـاً، أو عدد مدارس البنين، وعدد مـدارس البنات أو مقـارنة الإنفاق والدخـل لمجمـوعة من الأسـر . . . إلخ. وتمثل كل ظاهرة بمستطيـل يلاصق مستطيل الظاهرة الثـانية، ولكنه يتـميز بلون مـختلف، أو يظلل ويترك المستطيل الخاص بالظاهرة الثانية بدون تظليل، ونوضح ذلك بالمثال التالى :

مثال:

الجدول التـالى يمثل توزيع طلاب كلية الآداب فى جامـعة عين شمس خـلال عام ٩٦/٩٧ للتخصصات المختلفة حسب الجنس. مثّل هذه البيانات بالأعمدة المزدوجة.

التخصص	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	التاريخ	الجغرافيا	الإعلام	الاجتماع
ذكور	٧٤	١١٥	٢٥٤	١٠٩	٢٠١	١٣٨
اناث	١٢٩	١٣٤	١٥٥	٥٧	-	٤٨٥

تمثل هذه البيانات بالأعمدة المزدوجة كما هو موضح بالشكل التالى



شكل (٢-١١) : الأعمدة المزدوجة لطلاب وطالبات كلية الآداب حسب التخصص

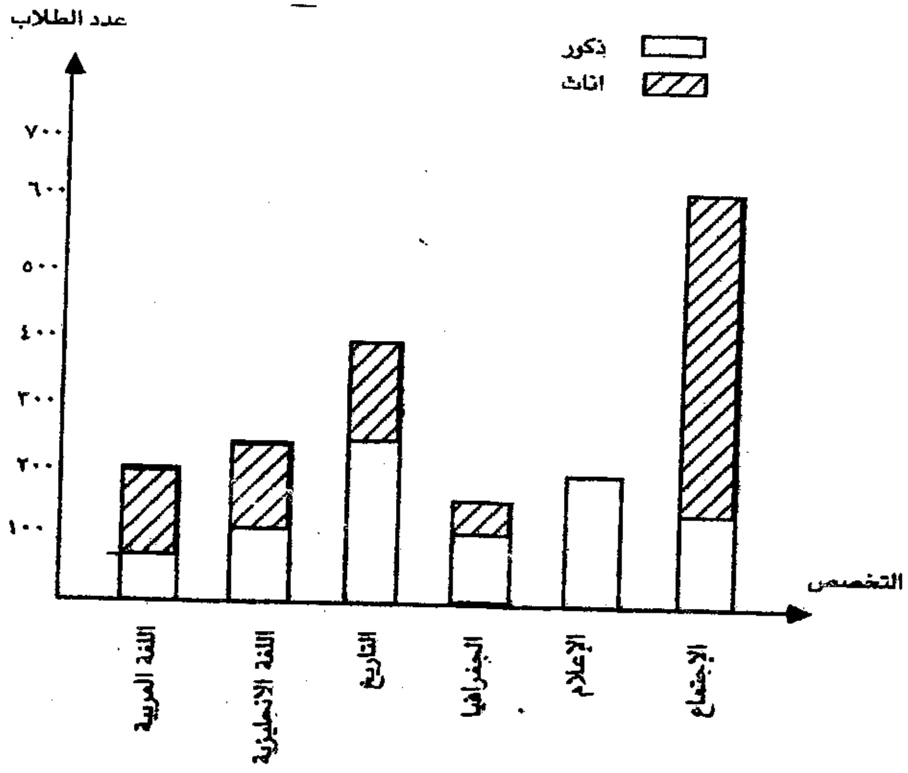
جـ- الأعمدة البيانية المجزأة

تستخدم الأعمدة البيانية المجـزأة فى حالة وجود أكثر من ظاهرة مثل ما تم بالنسبة للأعمدة المزدوجة السابقة. ولكن فى هذه الحالة يُرسم عمود واحد لمجموع القيم لبيانات الظاهرتين المرغوب تمثيلهـا، ثم يقسم المستطيل بنسبة عـدد البيانات لكل ظاهرة، ونوضح ذلك بالمثال التالى :

مثال :

استخدم الأعمدة البيانية المجزأة لتمثيل البيانات الخاصة بتوزيع طلاب كلية الآداب في جامعة عين شمس خلال عام ٩٦/٩٧ للتخصصات المختلفة حسب الجنس.

التخصص	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	التاريخ	الجغرافيا	الإعلام	الاجتماع
ذكور	٧٤	١١٥	٢٥٤	١٠٩	٢٠١	١٣٨
اناث	١٢٩	١٣٤	١٥٥	٥٧	-	٤٨٥
المجموع	٢٠٣	٢٤٩	٤٠٩	١٦٦	٢٠١	٦٢٣



شكل (٢-١٢) : الأعمدة المجزأة لطلاب وطالبات كلية الآداب حسب التخصص

٣- الرسوم الدائرية: Pie or Circular Charts "Graph"

هى عبارة عن دائرة ذات نصف قطر مناسب تقسم إلى قطاعات مركزية لكل قطاع زاوية تتناسب مع عدد المشاهدات ويمكن حساب الزاوية المركزية من القانون التالى :

$$\text{الزاوية المركزية التى تمثل عدد مشاهدات ما} = \frac{\text{عدد المشاهدات}}{\text{مجموع المشاهدات}} \times ٣٦٠^\circ$$

ونوضح ذلك بالمثال التالى :

مثال:

الجدول التالى يمثل توزيع خريجى كلية التجـارة جامعة عين شمس الحاصلين على تقدير جـيد جيـداً حسب التخـصص للعام الجامـعى ٩٧/٩٨ مثّل هذه البيـانات بالرسوم الدائرية.

التخصص	شعبة فرنسى	شعبة انجليزى	شعبة محاسبة	شعبة إدارة أعمال
عدد الخريجين	٢٥	٤٥	٦٠	٥٠

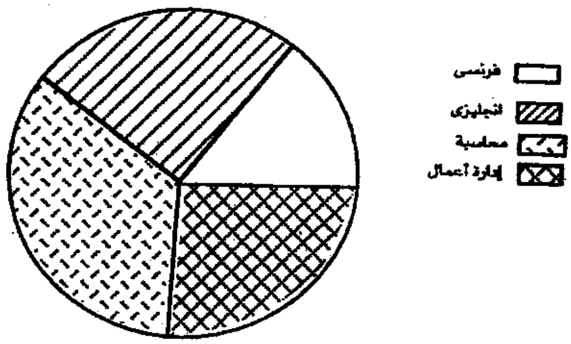
نلاحظ أن مـجمـوع الخريجين المراد تمثـيلهم = ١٨٠خـريج ولأن الزاوية الدائرية تساوى ٣٦٠ درجة فانه يمكن تحديد الزاوية المناظرة للخريجين لكل درجة كما يلى :

$$\text{الزاوية المركزية التى تمثل شعبة الفرنسى} = \frac{٢٥}{١٨٠} \times ٣٦٠ = ٥٠^\circ$$

$$\text{الزاوية المركزية التى تمثل شعبة الانجليزى} = \frac{٤٥}{١٨٠} \times ٣٦٠ = ٩٠^\circ$$

$$\text{الزاوية المركزية التى تمثل شعبة المحاسبة} = \frac{٦٠}{١٨٠} \times ٣٦٠ = ١٢٠^\circ$$

$$\text{الزاوية المركزية التى تمثل شعبة إدارة الأعمال} = \frac{٥٠}{١٨٠} \times ٣٦٠ = ١٠٠^\circ$$



شكل (٢-١٣) : الرسم الدائرى لخريجى كلية التجارة جامعة عين شمس

وهناك أنواعاً أخرى من الرسوم البيانية مثل الخرائط البيانية، والخرائط المظلة والرسوم التصويرية والمجسمات، وأشكال الجذع والورقة البيانية، ولكل منها استخداماتها، ولاشك أن عرض البيانات عن طريق الرسوم البيانية له عدة مميزات من أهمها :

أ- البساطة فى قراءة البيانات وخاصة إذا كان عدد المشاهدات كبيراً.

ب- سهولة تذكر النتائج حيث من المعروف أن الرسوم تعطى فكرة أكثر ثباتاً من الأرقام أو الكلمات.

جـ- عن طرق الرسوم البيانية يمكن توضيح أو تأكيد بيان ما عن طريق استخدام الألوان مثلاً، فلتوضيح أهمية بيان أو خطورته يمكن استخدام اللون الأحمر ... وهكذا.

د- جذب الإنتباه إذا أحسن رسم الشكل البيانى.

ومع ذلك فإن استخدام الرسوم البيانية فى عرض البيانات له عيوب ومنها التضحية بدقة البيانات حيث أن الأشكال والرسوم البيانية تهتم بتوضيح التغيرات العامة فقط دون الدخول فى التفاصيل الكاملة الدقيقة. ولذلك يحسن إرفاق الجدول مع الرسم، ومن عيوبها ايضا كثرة التكاليف وتعقد الرسوم، حيث أن بعض البيانات قد تحتاج إلى مقاييس رسم كبيرة، كما أنها قد تشتمل على مجموعات من البيانات المختلفة مما يجعل الرسوم معقدة.

تمـــارين

١- إذا كانت لدينا أطوال ٢٥ طالباً كما يلى (بالسنتيمتر)

١٦٠، ١٦١، ١٦٢ ، ١٧٠ ، ١٦٥ ، ١٦١ ، ١٧٢ ، ١٦١ ، ١٦٧ ، ١٧١، ١٦١، ١٦٥، ١٧١ ، ١٦٢ ، ١٦٠ ، ١٦٧ ، ١٦٨ ، ١٧٠ ، ١٦٥ ، ١٦٠، ١٧٠ ، ١٧١ ، ١٦١ ، ١٦٥ ، ١٧٠. كون الجدول التكرارى.

٢- فيما يلى تقديرات ٢٠ طالبا فى مادة الاحصاء

مقبول ، جيد ، مقبول ، ممتاز ، ضعيف ، مقبول ، جيد ، جيدا جداً ، ممتاز ، ضعيف جداً ، ضعيف ، جيد ، مقبول ، مقبول ، جيد ، ضعيف ، مقبول ، جيد جداً ، مقبول ، ضعيف جداً. المطلوب : إعداد الجدول التكرارى.

٣- تجمعت لدينا بيانات عن الأرباح اليومية لعدد ٦١٥ تاجراً من تجار التجزئة فى سلع معينة وكان جدول التوزيع التكرارى لهؤلاء التجار وفق فئات أرباحهم اليومية كما يلى :.

الفئات	١٤-	١٦-	١٨-	٢٠-	٢٢-	٢٤-٢٦	المجموع
عدد التجار	٤٥	١٨٠	٢٤٠	١٠٠	٤٠	١٠	٦١٥

المطلوب : عمل جدول تكرارى متجمع صاعد وهابط

٤- المطلوب اعداد الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والهابط للتوزيع التكرارى التالى:

فئات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٥٠-	٦٠-٨٠	المجموع
تكرارات	١٠	١٥	٢٠	١٤	١١	٧٠

٥- فيما يلى بيان بقيمة المصروفات اليومية بالجنيهات لأحد المحال التجارية خلال الخمسين يوماً الأولى من سنة ١٩٩٧.

٦٧	٧٢	٨٣	٨٧	٦٤	٧٢	٧٤	٨٥	٩٢	١٠٥
١٠٢	٧٦	٥٨	٧٩	٩٥	٩٩	٨٢	٨٤	٧٩	٨٦
١٠٧	١٠٣	٦٩	٦٤	٨٣	٨٧	٨٤	٩٧	٧٨	٦٢
٦٧	٨٩	١٠١	١٠٨	٨٧	٩٣	٥٣	٩١	٨٥	٩٦
٨٠	٧٠	٨٥	٧٣	١٠٤	٩٩	٩٠	٨٠	٨٦	٦٤

والمطلوب :

أ- اعداد جدول توزيع تكرارى لهذه المصروفات اليومية.

ب- اعداد جدول تكرارى متجمع صاعد ثم حساب عدد الأيام التى كانت تقل فيها قيم المصروفات عن ٩٠ جنيهاً.

جـ- اعداد جدول تكرارى متجمع هابط ثم حساب عدد الأيام التى كانت تصل فيها أو تزيد عنها قيم المصروفات عن ٨٠ جنيهاً.

٦- البيانات التالية تمثل أجور ٣٠ عاملاً إنتاجهم فى اليوم الواحد بالجنية المصرى، والمطلوب تكوين جدول تفريغ لهذه البيانات وصياغة جدول التوزيع التكرارى المزدوج لفئات الأجر وفئات الإنتاج.

الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج
٥١	٥٦	٨١	٧٦	٥٤	٥١	٥٨	٩١	٧٧	٧٢
٧١	٧٣	٧٢	٦٩	٧٢	٦٦	٧٤	٧٦	٩٤	٩٤
٨٢	٨١	٦٣	٦٦	٨٦	٨٧	٩١	٩٣	٦٤	٦٨
٦٢	٦١	٨٤	٨٣	٥٧	٥٣	٧٥	٧٣	٩٤	٩٧
٨٣	٨٦	٦٤	٦١	٨٧	٨٢	٩٢	٩٣	٧٧	٧٣
٧٩	٧٦	٨٥	٨٢	٦١	٥٨	٧٦	٧١	٧٩	٧٨

٨- فيما يلى توزيع درجات ١٠٠ طالب فى مادة الاحصاء

فئات الدرجات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-٣٠	المجموع
التكرار	١٥	٢٠	٣٠	٢٥	١٠	١٠٠

المطلوب : رسم المدرج التكراري لهذا التوزيع

٩- المطلوب اعداد المدرج التكرارى بفرض أنه توفر لدينا بيانات عن الأرباح الشهرية لعدد ٢٣٠ مشروعاً تجارياً وفيما يلى توزيع هذه المشروعات وفق فئات الأرباح الشهرية بالآف الجنيهات.

فئات الأرباح (بالالاف)	أقل من ١٥٠	١٥٠-	١٥٥-	١٦٠-	١٦٥-	١٧٠-	١٧٥-	١٨٠-	١٨٥-	١٩٠ فاكثر
عدد المشروعات (التكرارات)	٢	٨	٣٠	٤٥	٦٢	٣٥	٣٠	١٠	٥	٣

١٠- فيما يلى توزيع الأجور الأسبوعية لعدد ٥٠ عاملاً فى أحد المصانع (بالجنيه)

فئات الأجور الأسبوعية	٥٠-	٦٠-	٨٠-	١٠٠-	١١٠-١٢٠	المجموع
عدد العمال	١٠	١٥	١٨	٥	٢	٥٠

المطلوب رسم المدرج التكرارى.

١١- إذا كان لدينا توزيع ٦٠ تاجراً من تجار أجهزة التليفزيون وفق عدد الأجهزة المباعة خلال شهر واحد والموضح فيما يلى :

فئات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-٤٥
تكرارات	٢	٥	١٢	١٦	٩	٧	٥	٤

أ- ارسم المضلع التكرارى. ب - ارسم المنحنى التكرارى.

١٢-

فئات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-٣٠	المجموع
تكرارات	٢	٦	١٢	٤	١	٢٥

ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والهابط.

١٣- إذا كان لديك التوزيع التالى لـ ١٠٠ مفردة.

فئات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٤٠-٦٠	مجموع
ك	١٥	٢٠	٣٠	٢٥	١٠	١٠٠

المطلوب : ١- رسم المنحنى المتجمع الصاعد

٢- رسم المنحنى للمتجَمع الهابط

٣- رسم المنحنيين الصاعد والهابط معاً.

١٤- فيما يلى توزيع ١٥٠ عاملاً من عمال احدى المؤسسات وفقا لفئات أجورهم اليومية بالجنيهات :

فئة الأجر اليومى	٥٠-	١٠٠-	١٥٠-	٢٠٠-	٢٥٠-	٣٠٠-	٣٥٠-	٤٠٠-٤٥٠	المجموع
عدد العمال	٣	٩	٢٤	٥٤	٣٣	١٥	٩	٣	١٥٠

والمطلوب اعداد :

١- المدرج التكرارى للتوزيع. ٢- المضلع التكرارى للتوزيع

٣- المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد ٤- المنحنى التكرارى المتجمع الهابط.

١٥- إذا كان لدينا التغيرات التى حدثت على عدد سكان إحدى المدن خلال الفترة من ١٩٥٧ حتى ١٩٩٧.

السنوات	١٩٥٧	١٩٦٧	١٩٧٧	١٩٨٧	١٩٩٧
عدد السكان(بالالف)	٧١٠	٩٥٠	١٣٢٠	١٨٥٠	٢٤٢٠

ارسم الخط البيانى.

١٦-

السنة	٩١/٩٢	٩٢/٩٣	٩٣/٩٤	٩٤/٩٥	٩٥/٩٦
عدد الطلبة	٢٧٢٦١	٢٩٠٨٩	٣١٧٦٨	٣٥٩٩٧	٤٠٩٠٣
عدد الطالبات	٩٨٩٦	١١١٦٧	١٣٥٨٨	١٦٠٣١	١٨٣٦٥

قارن بين عدد الطلبة والطالبات برسم الخطوط البيانية.

١٧-

السنوات	٩٢/٩١	٩٣/٩٢	٩٤/٩٣	٩٥/٩٤	٩٦/٩٥	٩٧/٩٦	٩٨/٩٧
عدد الطلاب	٥٨٤١	٨٥١٩	٥٧٦٠	٩٣٥٧	٩٠٢٨	٧٤٤٥	٦٤٢٧

ارسم الأعمدة البيانية.

١٨-

السنوات	٩٢/٩١	٩٣/٩٢	٩٤/٩٣	٩٥/٩٤	٩٦/٩٥	٩٧/٩٦	٩٨/٩٧
تلاميذ الابتدائى بالالف	٢٩٤	٢٩٢	٣١١	٣٢١	٣٢٠	٣١٩	٣١٤
تلاميذ الاعدادى بالالف	٧٥	٨٥	٩٢	٩٨	١٠٢	١١١	١١٥

ارسم الأعمدة البيانية المزدوجة

١٨- مثّل الأعمدة المجزأة للبيانات التالية :

السنة	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨
عدد مدارس الذكور	١٧٧	٢٠٩	٢٧٣	٣٢٢	٣٤٣	٣٧٥
عدد مدرس الاناث	٣٥	٤٨	٥٨	٨٥	١١٣	١٣٨
المجموع	٢١٢	٢٥٧	٣٣١	٤٠٧	٤٥٦	٥١٣

١٩- فيما يلى توزيع للأراضى الزراعية تبعاً للمحاصيل المنزرعة فيها (الف فدان)

المحصول	قطن	قمح	أرز	قصب سكر	موالح	المجموع
عدد الأفدنة المنزرعة	٢٠٠	١٧٠	١٤٠	١٥٠	٦٠	٧٢٠

المطلوب عرض هذه البيانات باستخدام الدائرة.

٢٠- فيما يلى جدول يمثل مساحات القارات للعالم مثلها بالرسوم الدائرية.

القـــارة	أفريقيا	آسيا	أوروبا	امريكا ش	استراليا	أمريكا ج
المساحة بالمليون كم^2	٣٠,٣	٤٧,٤	٤,٩	٢٤,٣	٨,٥	١٧,٩

أمثلـــة متنوعـــة

(١) البيانات الآتية تمثل دخل (٣٠) عامل في أسبوع معين.

٢٠	٢٥	٣٠	١٢	١٤
٥٨	٤	١٦	١٨	١٢
٢٠	٤٨	٣٨	٣٦	٤٥
صفر	٤٢	٢٣	٣٣	١٨
١٦	٩	٢٧	٢٩	١٦
١١	٣٤	١٦	١٨	١٥

والمطلوب : وضع البيانات السابقة في جدول تكراري مناسب.

الحـــــل

١ – المدى = ٥٨ – صفر = ٥٨

٢ – عدد الفئات : يفترض (٦) فئات

٣ – طول الفئة = $\frac{٥٨}{٦}$ = ٩,٧ ≃ ١٠

توزيع التكرارات على الفئات :

الفئـــات	العـــلامات	التكرارات
صفر إلى أقل من ١٠	///	٣
١٠ إلى أقل من ٢٠	~~////~~ ~~////~~ //	١٢
٢٠ إلى أقل من ٣٠	~~////~~ /	٦
٣٠ إلى أقل من ٤٠	~~////~~	٥
٤٠ إلى أقل من ٥٠	///	٣
٥٠ إلى ٦٠	/	١
المجموع		٣٠

- عمل جدول التوزيع التكرارى:

الفئــات	التكــرارات
صفر –	٣
١٠ –	١٢
٢٠ –	٦
٣٠ –	٥
٤٠ –	٣
٥٠ –	١
مجـ	٣٠

(٢) فـيما يلـى درجـات ٣٠ طالـب فـى امتحان أخر العام للحصول على درجة البكالوريوس.

١٥ ، ١٦ ، ٢٠ ، ١٤ ، ١٠ ، ٨ ، ٧ ، ١٥ ، ١٤ ، ١٣ ، ١٢,٥ ، ١٣,٥ ، ١٦ ، ٢٠ ، ١٠,٥ ، ١١ ، ١٢ ، ٦ ، صـفر ، ٥ ، ١٥,٥ ، ١١ ، ١١,٥ ، ٤,٥ ، ١٥,٥ ، ١٠,٥ ، ١٢ ، ١١ ، ١٩,٥ ، ٢٠ . كون الجدول التكرارى

الحـــل

١- المدى = ٢٠ – صفر = ٢٠

٢ – عدد الفئات : (٧) فرضا

٣ – طول الفئة = $\frac{٢٠}{٧}$ = ٢,٩ ≃ ٣

الفئات	العلامات	التكرارات
صفر –	/	١
٣ –	//	٢
٦ –	///	٣
٩ –	~~////~~ //	٧
١٢–	~~////~~ //	٧
١٥–	~~////~~ /	٦
١٨ – ٢١	////	٤
المجموع		**٣٠**

وبعد ذلك يكتب التوزيع التكرارى أو الجدول التكرارى كالتالى :-

فئـــات الدرجات	التكـــرارات
صفر –	١
٣ –	٢
٦ –	٣
٩ –	٧
١٢–	٧
١٥–	٦
١٨ – ٢١	٤
المجموع	٣٠

(٣) الأرقـــام التالـــية توضـــح قـــيم القروض بالمليون جنيه التى منحها بنك التسليف لخمسين من عملائه :

	٥٢	٧٨	٥٤	٧١	٦٩	٦١	٧٣	٧٦	٤٣	٧٠	٦٧	٦٧
٧٥	٥٨	٦٣	٧٧	٧٩	٤١	٨٠	٧٢	٧١	٦٨	٦٦	٥٧	٧٣
٨٦	٧٨	٤٦	٨١	٨٢	٧٥	٧٤	٨٢	٦٣	٨٥	٨٩	٨٧	٦٧
٩١	٩٣	٩٨	٧٥	٣٥	٨٤	٤٧	٥٨	٦٤	٨٣	٣٨	٧٦	

المطلوب : إعداد جدول توزيع تكراري لهذه البيانات.

الحـــــل

١ – المدى = ٩٨ – ٣٥ = ٦٣

٢ – عدد الفئات : يفترض (٧)

٣ – طول الفئة = $\frac{٦٣}{٧}$ = ٩

التوزيع التكراري للمقترضين

حسب قيمة القرض

الفئات	العلامات	التكرارات
٣٥-	////	٤
٤٤-	///	٣
٥٣-	~~////~~	٥
٦٢-	~~////~~ ~~////~~	١٠
٧١-	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	١٥
٨٠-	~~////~~ ////	٩
٨٩-٩٨	////	٤
المجموع		٥٠

(٤) قــام أحد المدرسين بعمل امتحان لتلاميذ أحد الفصول فى مادة الرياضيات وكان هــذا الفصــل يضــم ٥٠ طالبا وكانت الدرجة النهائية لهذه المادة هى ٢٠ درجة فكانت درجات التلاميذ كما يلى:

١٢ ، ١٥ ، ١٣ ، ١١ ، ٥ ، ٦ ، ٩ ، ١٨ ، ٩ ، ٧ ، ١٣ ، ٧، صفر ، ٢ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٧ ، ١١ ، ٨ ، ١١ ، ٧ ، ١٩ ، ١١ ، ١٣ ، ٨ ، ١٤ ، ٤، ٦، ٩ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٤ ، ١١ ، ١٠ ، ٩ ، ٨ ، ٧ ، ١٦ ، ١٩ ، ١ ، ٣ ، ١٧، ١٥ ، ١٤ ، ١٣ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١١ ، ١٩.

والمطلوب : عرض هذه البيانات فى صورة جدول تكرارى

الحــــــل

١ – المدى = ١٩ – صفر = ١٩

٢ – عدد الفئات : يفترض (٥)

٣ – طول الفئة = $\frac{١٩}{٥}$ = ٣,٨ ≃ ٤

توزيع ٥٠ طالبا حسب الدرجات

الفئات	العلامات	التكرارات
صفر –	////	٤
٤ –	~~////~~ ///	٨
٨ –	~~////~~ ~~////~~ ////	١٤
١٢ –	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	١٦
١٦ –	~~////~~ ///	٨
المجموع		٥٠

جدول تكرارى يبيّن توزيع التلاميذ حسب الدرجات

فئـــات الدرجات	التكـــرارات
صفر –	٤
٤ –	٨
٨ –	١٤
١٢ –	١٦
١٦–٢٠	٨
المجموع	٥٠

(٥) المطلــوب اعــداد الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والهابط للتوزيع التكرارى التالي:

فئات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٥٠ –	٦٠ – ٨٠	المجموع
تكرارات	١٠	١٥	٢٠	١٤	١١	٧٠

الحـــل

فئات	ك	المتجمع الصاعد	
		فئات المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع الصاعد
١٠–	١٠	أقل من ١٠	صفر
٢٠–	١٥	أقل من ٢٠	١٠
٣٠–	٢٠	أقل من ٣٠	٢٥
٥٠–	١٤	أقل من ٥٠	٤٥
٦٠–٨٠	١١	أقل من ٦٠	٥٩
	٧٠	أقل من ٨٠	٧٠

فئات	ك	المتجمع الهابط	
		فئات المتجمع الهابط	التكرار المتجمع الهابط
١٠–	١٠	١٠ فأكثر	٧٠
٢٠–	١٥	٢٠ فأكثر	٦٠
٣٠–	٢٠	٣٠ فأكثر	٤٥
٥٠–	١٤	٥٠ فأكثر	٢٥
٦٠–٨٠	١١	٦٠ فأكثر	١١
	٧٠	٨٠ فأكثر	صفر

(٦) من البيانات التالية :

الدخل	أقل من ١٠	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٦٠-	٨٠ فأكثر
عدد العمال	٧	٦	٨	١٠	١٥	٩	٥

المطلوب :

١- عمل جدول متجمع صاعد.

٢- عمل جدول متجمع هابط.

الحـــــــل

جدول متجمع صاعد **جدول متجمع هابط**

ف	ك	فئات المتجمع الصاعد	تكرار متجمع صاعد	فئات المتجمع الهابط	تكرار متجمع هابط
أقل من ١٠	٧	أقل من الحد الأدنى	صفر	الحد الأدنى فأكثر	٦٠
١٠-	٦	أقل من ١٠	٧	١٠ فأكثر	٥٣
٢٠-	٨	أقل من ٢٠	١٣	٢٠ فأكثر	٤٧
٣٠-	١٠	أقل من ٣٠	٢١	٣٠ فأكثر	٣٩
٤٠-	١٥	أقل من ٤٠	٣١	٤٠ فأكثر	٢٩
٦٠-	٩	أقل من ٦٠	٤٦	٦٠ فأكثر	١٤
٨٠ فأكثر	٥	أقل من ٨٠	٥٥	٨٠ فأكثر	٥
		أقل من الحد الأعلى	٦٠	الحد الأعلى فأكثر	صفر
مجـ	٦٠				

(٧) البيانات التالية تمثل دخل ١٠٠ عامل

فئات الدخل	٢٠ –	٢٥ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	٦٠ –	٨٠ – ٩٠
عدد العمال	٨	١٢	٢٠	٢٥	١٥	١٧	٣

والمطلوب : عرض البيانات فى شكل التكرار النسبى.

الحل :

التكرار النسبى

ف	ك	التكرار / مجموع التكرارات
٢٠–	٨	٨/١٠٠=٠,٠٨
٢٥–	١٢	١٢/١٠٠=٠,١٢
٣٠–	٢٠	٢٠/١٠٠=٠,٢٠
٤٠–	٢٥	٢٥/١٠٠=٠,٢٥
٥٠–	١٥	١٥/١٠٠=٠,١٥
٦٠–	١٧	١٧/١٠٠=٠,١٧
٨٠–٩٠	٣	٣/١٠٠=٠,٠٣
مجـ	١٠٠	١

(٨) إذا قام أحد المدرسين بعمل اختبارين لتلاميذ أحد الفصول فى مادتى الرياضة واللغة العربية فإذا كان عدد تلاميذ الفصل ٣٠ تلميذا كانت درجاتهم كالتالى:

رياضة	١٠	١٢	١٣	٨	٦	١٦	٩	١١	صفر	٣
لغة عربية	١٠	٩	١٥	١٥	٩	٩	١٠	١٢	٢	٤
رياضة	٢	١٨	١٩	١٦	١١	٧	٨	١٠	٨	١٤
لغة عربية	صفر	١٩	١٨	١٩	١٦	٩	٩	١٠	٦	١٣
رياضة	١٥	١٣	١٢	١٧	١٦	١٧	١٩	١١	١٣	١٢
لغة عربية	١٤	٧	١٥	١٦	١٧	١٧	١٨	١٢	١٤	١٣

والمطلوب : عمل التوزيع التكرارى المزدوج لدرجات هؤلاء التلاميذ فى مادة الرياضة واللغة العربية.

الحل

١- مدى الرياضة = ١٩ - صفر = ١٩

مدى اللغة العربية = ١٩ - صفر = ١٩

٢- نفرض أن المدرس أراد تقسيم التلاميذ فى المادتين إلى خمس مجاميع.

∴ عدد الفئات = ٥ فرضاً

٣- يكون طول الفئة فى كل من المادتين = $\frac{١٩}{٥}$ = ٣,٨ ≃ ٤ تقريبا.

∴ التوزيع كما يلى:

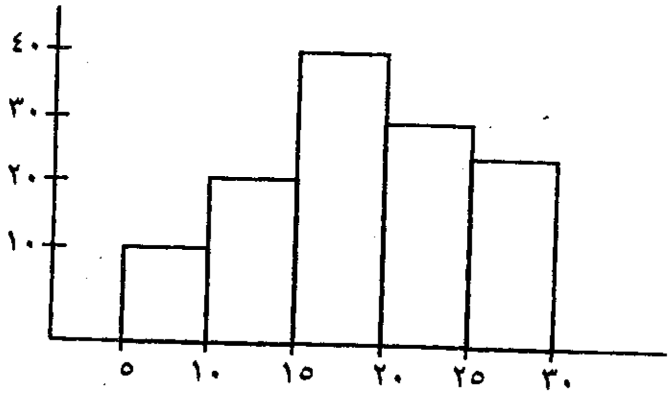
توزيع درجات ٣٠ طالبا فى مادتى الرياضة واللغة العربية

رياضة / عربى	صفر-	٤-	٨-	١٢-	١٦-٢٠	مجموع
صفر -	// (٢					٢
٤ -	/ (١		/ (١	/ (١		٣
٨-		// (٢	//// (٤	/ (١	/ (١	٨
١٢-			/// (٣	//// / (٦		٩
١٦ - ٢٠			/ (١		//// // (٧	٨
المجموع	٣	٢	٩	٨	٨	٣٠

(٩) ارسم المدرج التكرارى للبيانات التالية :

فئة	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-٣٠	مجموع
تكرار	١٠	٢٠	٤٠	٣٠	٢٥	١٢٥

الحـــــل



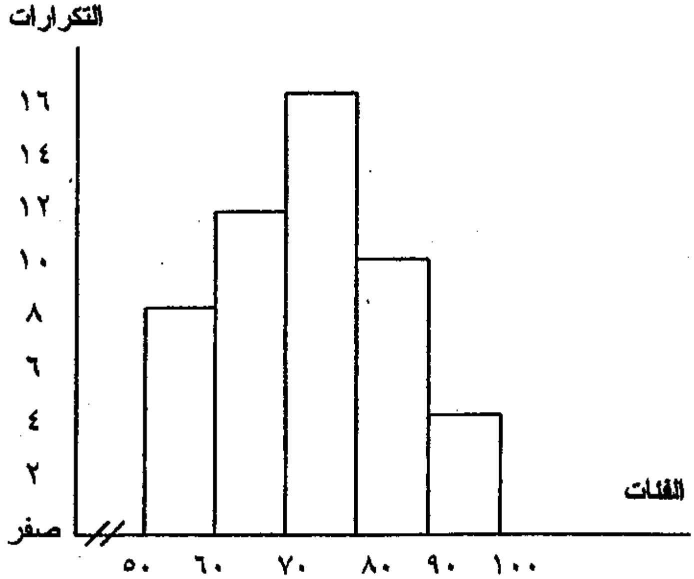
المدرج التكرارى

(١٠) مــن الــتوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالب من مادة الإحصاء ارسم المدرج التكرارى.

الفئة	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	مجموع
التكرار	٨	١٢	١٦	١٠	٤	٥٠

الحـــــــل

المدرج التكرارى لدرجات ٥٠ طالب فى مادة الإحصاء



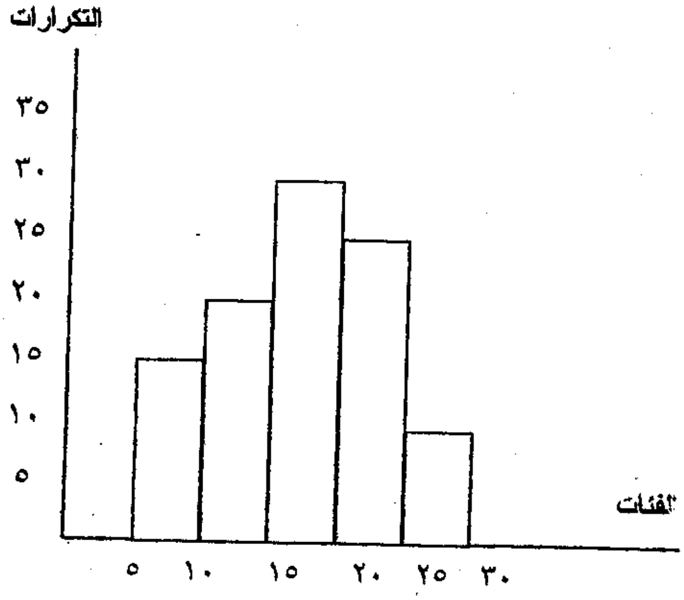
(١١) فيما يلى توزيع درجات ١٠٠ طالب فى مادة الاحصاء

فئات الدرجات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-٣٠	المجموع
التكرار	١٥	٢٠	٣٠	٢٥	١٠	١٠٠

المطلوب : رسم المدرج التكرارى لهذا التوزيع

الحـــــل

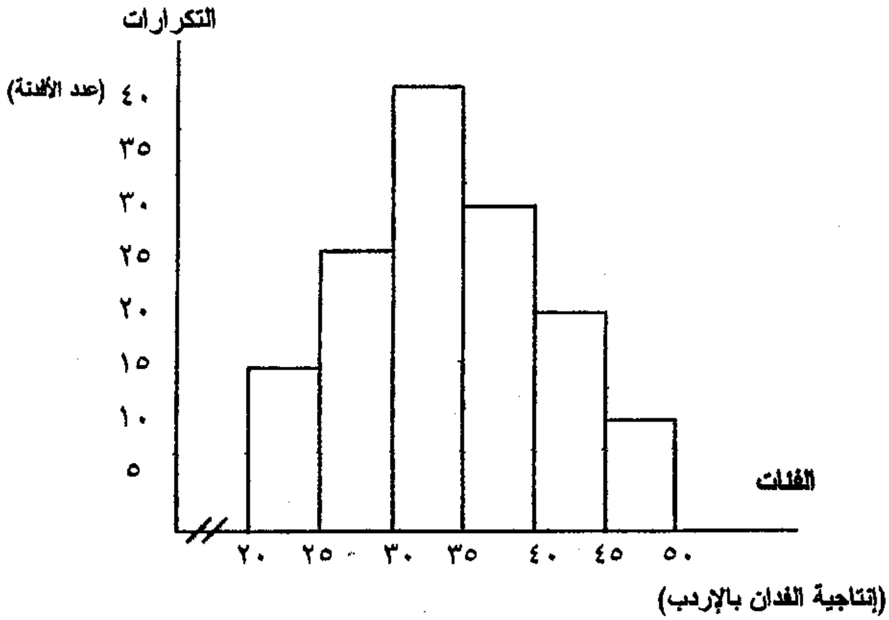
فئات التوزيع متساوية يتم رسم المدرج بالتكرارات المشاهدة دون تعديل.



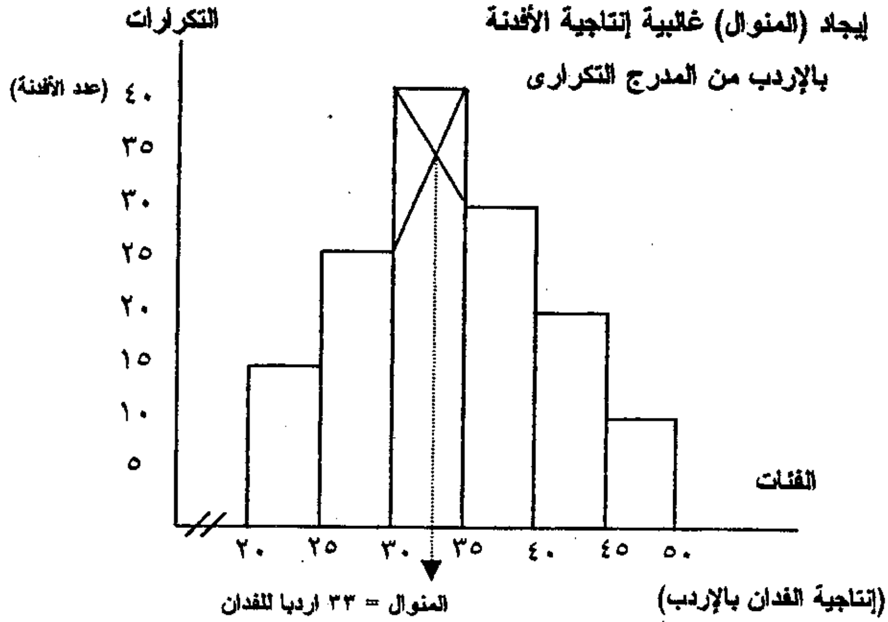
(١٢) الآتـى يمـثل الـتوزيع الـتكرارى لإنتاجـية (١٤٠) فدان بالإردب من أحد المحاصيل الزراعية آخذت كعينة عشوائية، والمطلوب تمثيل البيانات عن طريق المدرج التكرارى.

التوزيع التكرارى لإنتاجية (١٤٠) فدان بالإردب من أحد المحاصيل

إنتاجية الفدان بالإردب	عدد الأفدنه
٢٠-	١٥
٢٥-	٢٥
٣٠-	٤٠
٣٥-	٣٠
٤٠-	٢٠
٤٥-	١٠
المجموع	١٤٠



إيجاد (المنوال) غالبية إنتاجية الأفدنة بالإردب من المدرج التكرارى



(١٣) الآتى يمثل درجات عينة عشوائية مكونة من (٤٠) طالبًا من الفرقة الثانية بكلية التجارة جامعة عين شمس فى مادة الإحصاء، حيث وضعت الدرجات فى جدول التوزيع التكرارى الآتى:

التوزيع التكرارى لدرجات عينة عشوائية
من (٤٠) طالبًا فى مادة الإحصاء

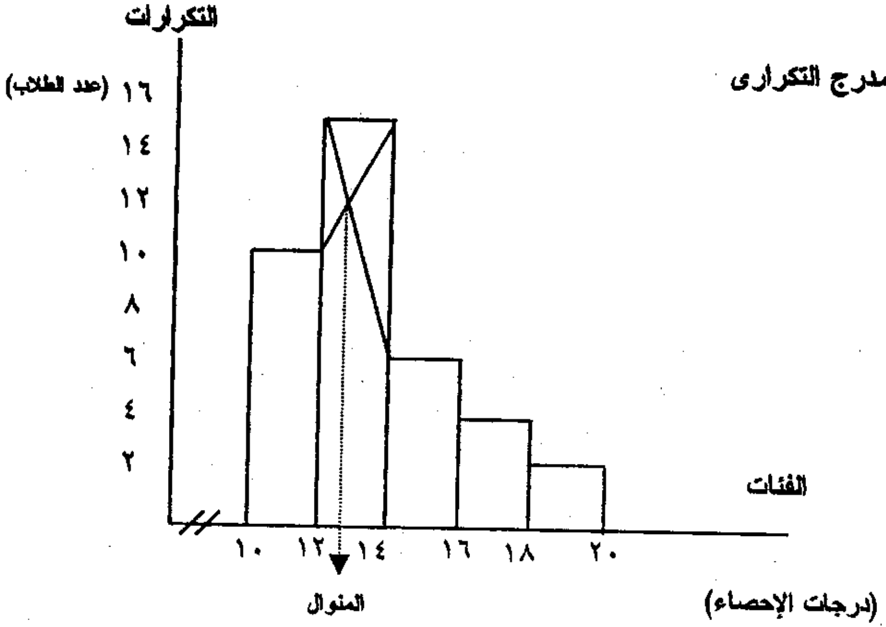
فئات الدرجات	عدد الطلاب
أقل من ١٠	٣
١٠-	١٠
١٢-	١٥
١٤-	٦
١٦-	٤
١٨-٢٠	٢
المجموع	٤٠

والمطلوب :

١-رسم المدرج التكرارى.

٢-إيجاد الدرجة التى حصل عليها معظم طلبة العينة من الرسم.

المدرج التكرارى



وعلى ذلك فإن معظم الطلاب قد حصلوا على الدرجـــة ١٢,٧ وهى تقــرب إلى ١٣ درجـــة، أى أن معظــم الطلبة فى السنة الثانية قد حصلوا على تقدير جيد فى مادة الإحصاء.

(١٤) فيما يلى توزيع الأجور الأسبوعية لعدد ٥٠ عاملا فى أحد المصانع (بالجنية)

فئات الأجور الأسبوعية	٥٠-	٦٠-	٨٠-	١٠٠-	١١٠-١٢٠	مجموع
عدد العمال	١٠	١٥	١٨	٥	٢	٥٠

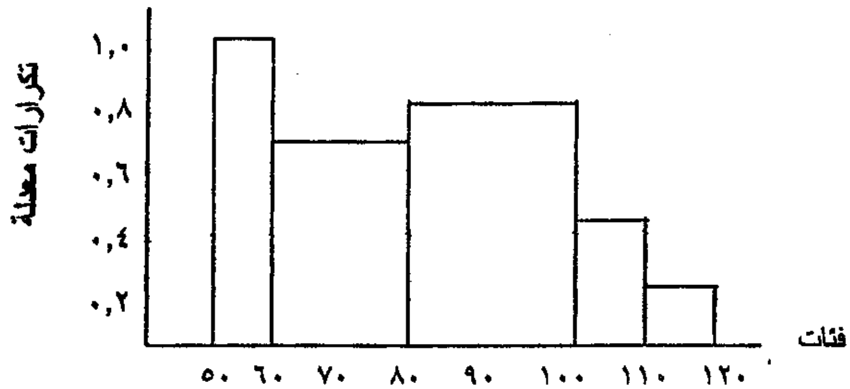
المطلوب : رسم المدرج التكرارى

الحـــــل

يلاحــظ أن فئات التوزيع غير متساوية ولذا وجب تعديل التكرارات كما يوضحه الجدول التالى.

فئات الأجر	التكرارات	طول الفئة	التكرار المعدل
٥٠-	١٠	١٠	١,٠٠
٦٠-	١٥	٢٠	٠,٧٥
٨٠-	١٨	٢٠	٠,٩٠
١٠٠-	٥	١٠	٠,٥٠
١١٠-١٢٠	٢	١٠	٠,٢٠
	٥٠		

ويرســم المــدرج الــتكرارى آخذيــن اطوال الفئات الفعلية كقواعد للمستطيلات والتكرارات المعدلة كارتفاعات لهذه المستطيلات.



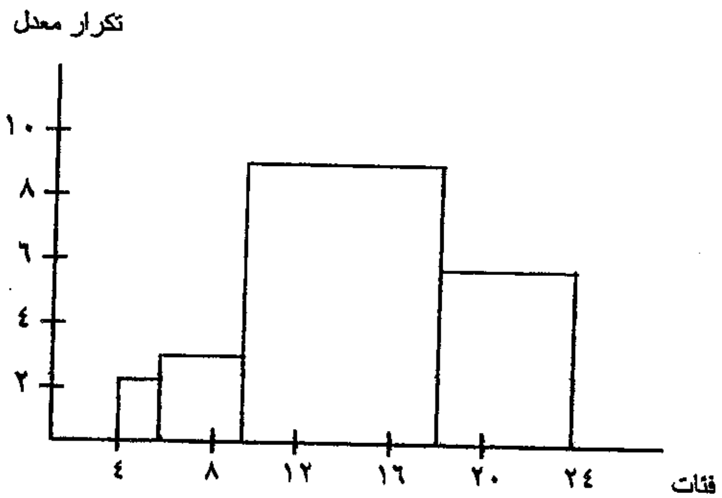
(١٥) اعرض البيانات التالية فى شكل مدرج تكرارى

فئة	٤-	٦-	١٠-	١٨-٢٤	مجموع
تكرار	٤	١٢	٧٢	٣٦	١٢٤

الحـــــــل

نقوم بتعديل التكرارات حيث أن التكرار المعدل = $\frac{\text{التكرار الأصلى}}{\text{طول الفئة}}$

فئة	تكرار	طول الفئة	تكرار معدل
٤-	٤	٢	٤ ÷ ٢ = ٢
٦-	١٢	٤	١٢ ÷ ٤ = ٣
١٠	٧٢	٨	٧٢ ÷ ٨ = ٩
١٨-٢٤	٣٦	٦	٣٦ ÷ ٦ = ٦



(١٦) الآتــى يمــثل درجات عينة عشوائية مكونة من (٥٦٠) عامل لختيروا من أحد المدن لمعرفة الدخل الأسبوعى لهم.

التوزيع التكرارى للدخل الأسبوعى

لعينة عشوائية من (٥٦٠) عامل

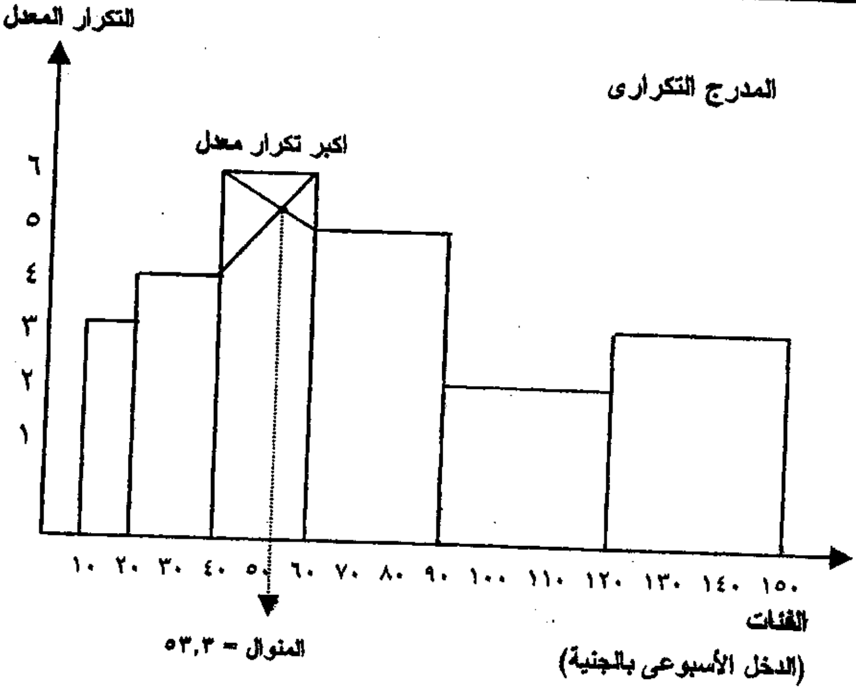
الدخل الأسبوعى بالجنية	عدد العمال
أقل من ١٠	٢٠
-١٠	٣٠
-٢٠	٨٠
-٤٠	١٢٠
-٦٠	١٥٠
-٩٠	٦٠
-١٢٠	٩٠
١٥٠ فأكثر	١٠
المجموع	٥٦٠

والمطلوب :

١- عرض البيانات السابقة باستخدام المدرج التكرارى.

٢- إيجاد الدخل الأسبوعى لمعظم العمال (المنوال) من الرسم.

ف	ك	طول الفئة (ط) = نهاية الفئة – بدايتها	التكرار المعدل (ك ÷ ط)
أقل من ١٠	٢٠	—	—
١٠-	٣٠	٢٠ – ١٠ = ١٠	٣٠ ÷ ١٠ =٣
٢٠-	٨٠	٤٠ – ٢٠ = ٢٠	٨٠ ÷ ٢٠ = ٤
٤٠-	١٢٠	٦٠ – ٤٠ = ٢٠	١٢٠ ÷ ٢٠ = ٦
٦٠	١٥٠	٩٠ – ٦٠ = ٣٠	١٥٠ ÷ ٣٠ = ٥
٩٠-	٦٠	١٢٠ – ٩٠ = ٣٠	٦٠ ÷ ٣٠ = ٢
١٢٠-	٩٠	١٥٠ – ١٢٠ = ٣٠	٩٠ ÷ ٣٠ = ٣
١٥٠ فأكثر	١٠	—	—
مجـ	٥٦٠		



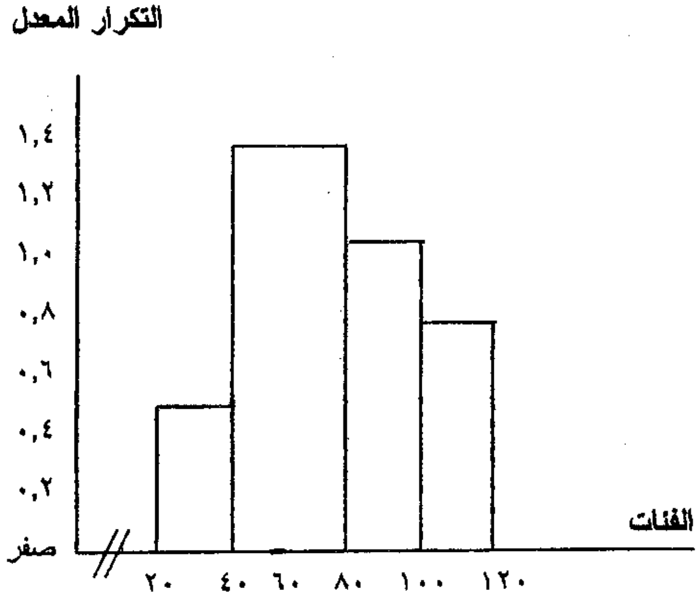
(١٧) ارسم المدرج التكرارى للبيانات الآتية:

الفئة	٢٠-	٤٠-	٨٠-	١٠٠-١٢٠	المجموع
التكرار	١٠	٥٥	٢٠	١٥	٥٠

الحـــــــل

بالـــنظر إلى هذه البيانات نجد أن الفئات ليست متساوية (غير منتظمة) لذلك قبل رسم المدرج التكرارى ينبغى الحصول على التكرار المعدل.

الفئة	التكرار	طول الفئة	التكرار المعدل
٢٠-	١٠	٢٠	٠,٥
٤٠-	٥٥	٤٠	١,٣٧٥
٨٠-	٢٠	٢٠	١,٠٠
١٠٠-١٢٠	١٥	٢٠	٠,٧٥
المجموع	١٠٠		



(١٨) الآتــى يمــثل بيانات عن الأجر لــ (٩٠) عامل اختيرو بطريقة عشوائية من إحدى المدن بالجنيهات:

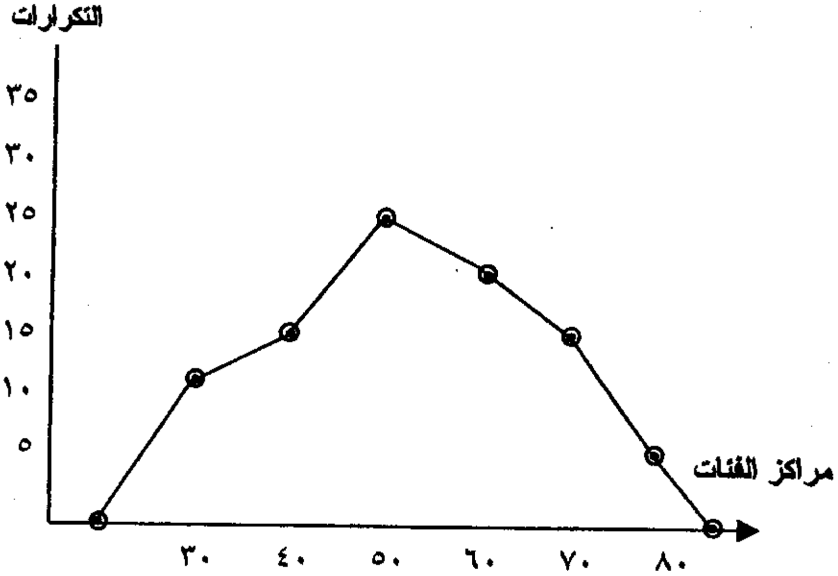
فئات الأجر بالجنيهات	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-٨٥	المجموع
عدد العمال	١٠	١٥	٢٥	٢٠	١٥	٥	٩٠

المطلوب : وصف بيانات الجدول السابق باستخدام المضلع التكرارى.

الحـــل

مراكز الفئات

ف	ك	$س = \frac{\text{بداية الفئة + نهايتها}}{٢}$
٢٥-	١٠	(٢٥ + ٣٥) ÷ ٢ = ٣٠
٣٥-	١٥	(٣٥ + ٤٥) ÷ ٢ = ٤٠
٤٥-	٢٥	(٤٥ + ٥٥) ÷ ٢ = ٥٠
٥٥-	٢٠	(٥٥ + ٦٥) ÷ ٢ = ٦٠
٦٥-	١٥	(٦٥ + ٧٥) ÷ ٢ = ٧٠
٧٥-٨٥	٥	(٧٥ + ٨٥) ÷ ٢ = ٨٠
مجـ	٩٠	



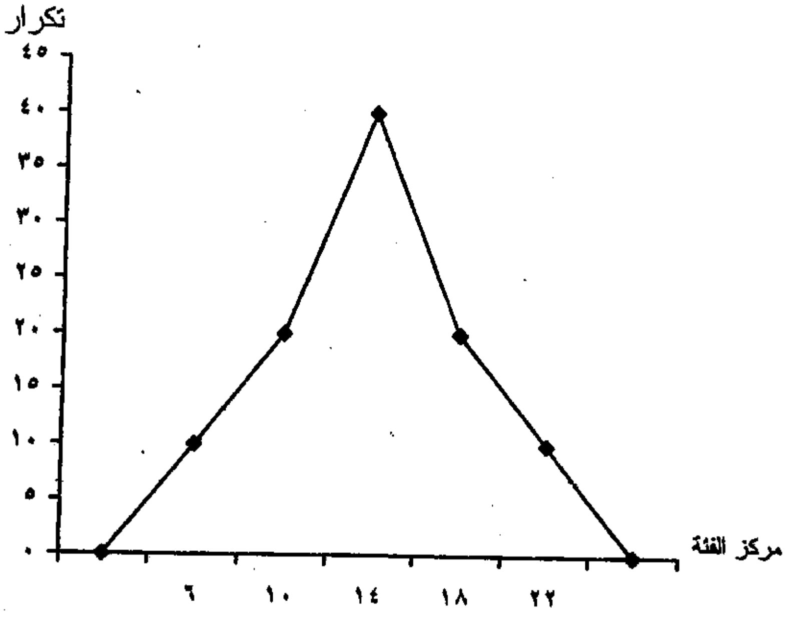
المضلع التكرارى

(١٩) ارسم المضلع التكرارى للبيانات التالية :

فئة	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-٢٤
تكرار	١٠	٢٠	٤٠	٢٠	١٠

الحـــــل

فئة	تكرار	مركز الفئة
٤-	١٠	٦
٨-	٢٠	١٠
١٢-	٤٠	١٤
١٦-	٢٠	١٨
٢٠-٢٤	١٠	٢٢



(٢٠) الآتـــى يوضـــح درجات عينة من (٢٤٠) طالب اختيروا بطريقة عشوائية من إحدى الكليات درجات (٢٤٠) طالب فى مادة الإحصاء فى إحدى الكليات.

فئات الدرجات	عدد الطلاب
أقل من ٥٠	١٢
٥٠-	٢٠
٥٥-	٣٠
٦٠-	١٠٠
٧٠-	٥٠
٨٠-	٣٠
٩٠ فأكثر	١٨
المجموع	٢٤٠

والمطلوب : تمثيل البيانات السابقة باستخدام المضلع التكرارى.

الحـــــل

يلاحظ الآتى من الجدول السابق :

١- الجدول مفتوح من البداية والنهاية.

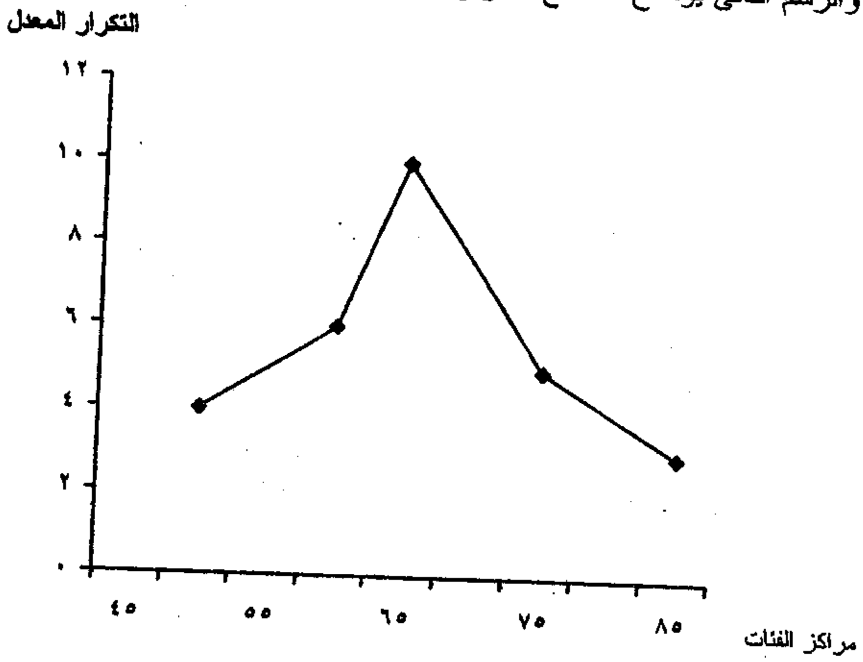
∴ يمكن إهمال الفئة الأولى والفئة الأخيرة فى الرسم.

٢- أطوال الفئات غير متساوية.

∴ لابد من عمل تكرار معدل ويتم ذلك كالآتى:-

ف	ك	مراكز فئات	أطوال الفئات	التكرار المعدل
أقل من ٥٠	١٢	–	–	–
٥٠–	٢٠	٥٢,٥	٥	٤
٥٥–	٣٠	٥٧,٥	٥	٦
٦٠–	١٠٠	٦٥	١٠	١٠
٧٠–	٥٠	٧٥	١٠	٥
٨٠–	٣٠	٨٥	١٠	٣
٩٠ فأكثر	١٨	–	–	–
مجـ	٢٤٠			

والرسم التالى يوضح المضلع التكرارى



(٢١) اختـــيرت عينة عشوائية مكونة من (٣٣) فردًا من إحدى المجتمعات ورصدت أعمارهم فى جدول التوزيع التكرارى الآتى:

أعمار عينة عشوائية من (٣٣) فردا اختيروا من أحد المدن

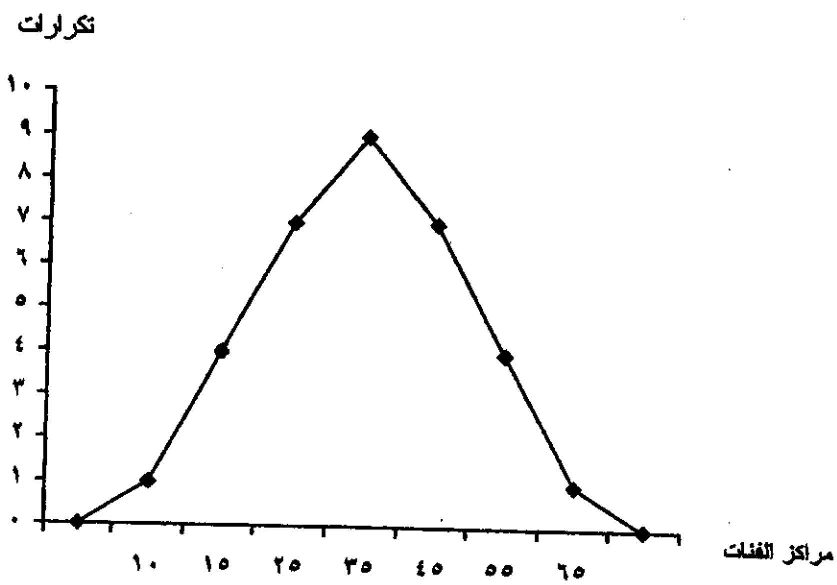
فئات العمر	عدد الأشخاص
٥-	١
١٥-	٤
٢٥-	٧
٣٥-	٩
٤٥-	٧
٥٥-	٤
٦٥-	١
مجموع الأشخاص	٣٣

ارسم المنحنى التكرارى

الحـــــل

ف	ك	مراكز الفئات (س)
٥-	١	(٥ + ١٥) ÷ ٢ = ١٠
١٥-	٤	(١٥ + ٢٥) ÷ ٢ = ٢٠
٢٥-	٧	(٢٥ + ٣٥) ÷ ٢ = ٣٠
٣٥-	٩	(٣٥+ ٤٥) ÷ ٢ = ٤٠
٤٥-	٧	(٤٥ + ٥٥) ÷ ٢ = ٥٠
٥٥-	٤	(٥٥ + ٦٥) ÷ ٢ = ٦٠
٦٥-	١	(٦٥ + ٧٥) ÷ ٢ = ٧٠
مجـ	٣٣	

المنحنى التكرارى



(٢٢) إذا كان لديك التوزيع التالى لـ ١٠٠ مفردة

فئات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٤٠-٦٠	المجموع
ك	١٥	٢٠	٣٠	٢٥	١٠	١٠٠

المطلوب :

١- رسم المنحنى المتجمع الصاعد.

٢- رسم المنحنى المتجمع الهابط.

٣- رسم المنحنيين الصاعد والهابط معًا.

الحـــــل

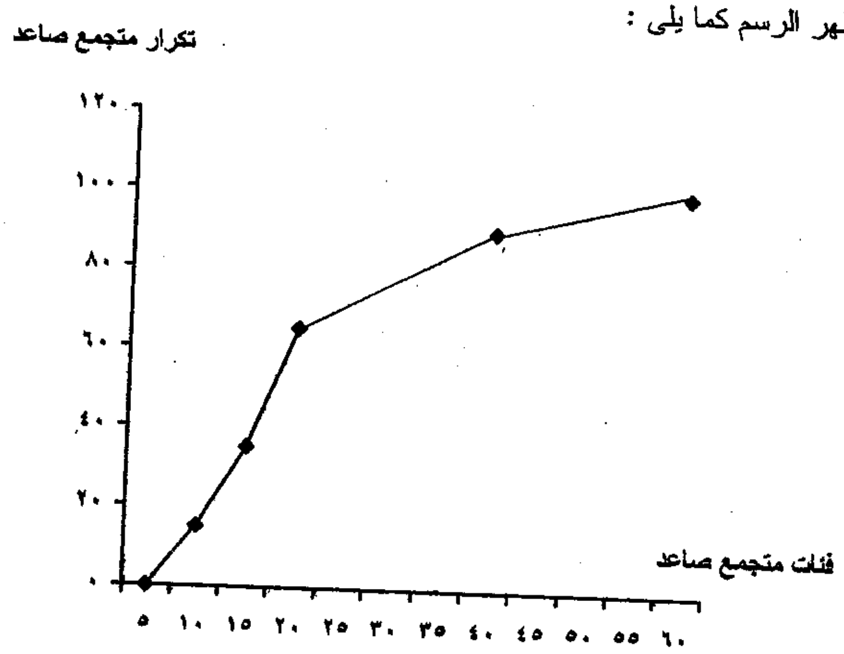
١- لرسم المنحنى المتجمع الصاعد يتم تكوين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد.

٢- لرسم المنحنى المتجمع الهابط يتم تكوين الجدول التكرارى المتجمع الهابط.

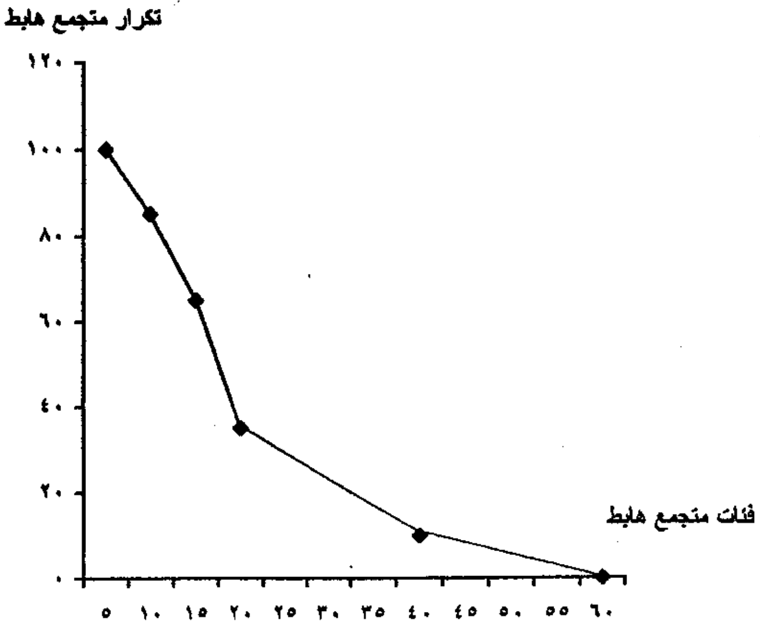
والجدول التالي يوضح الجدولين معًا:

الفئات	ك	المتجمع الصاعد		المتجمع الهابط	
		ف م ص	ك م ص	ف م هـ	ك م هـ
٥ —	١٥	أقل من ٥	صفر	٥ فأكثر	١٠٠
١٠-	٢٠	أقل من ١٠	١٥	١٠ فأكثر	٨٥
١٥-	٣٠	أقل من ١٥	٣٥	١٥ فأكثر	٦٥
٢٠-	٢٥	أقل من ٢٠	٦٥	٢٠ فأكثر	٣٥
٤٠-٦٠	١٠	أقل من ٤٠	٩٠	٤٠ فأكثر	١٠
	١٠٠	أقل من ٦٠	١٠٠	٦٠ فأكثر	صفر

ويظهر الرسم كما يلى :

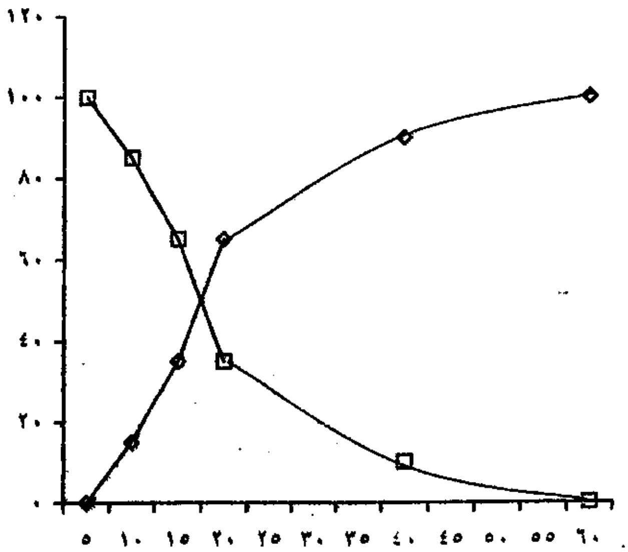


المنحنى المتجمع الصاعد



المنحنى المتجمع الهابط

وبرسم المنحنيين معاً



(٢٣) من البيانات الآتية :

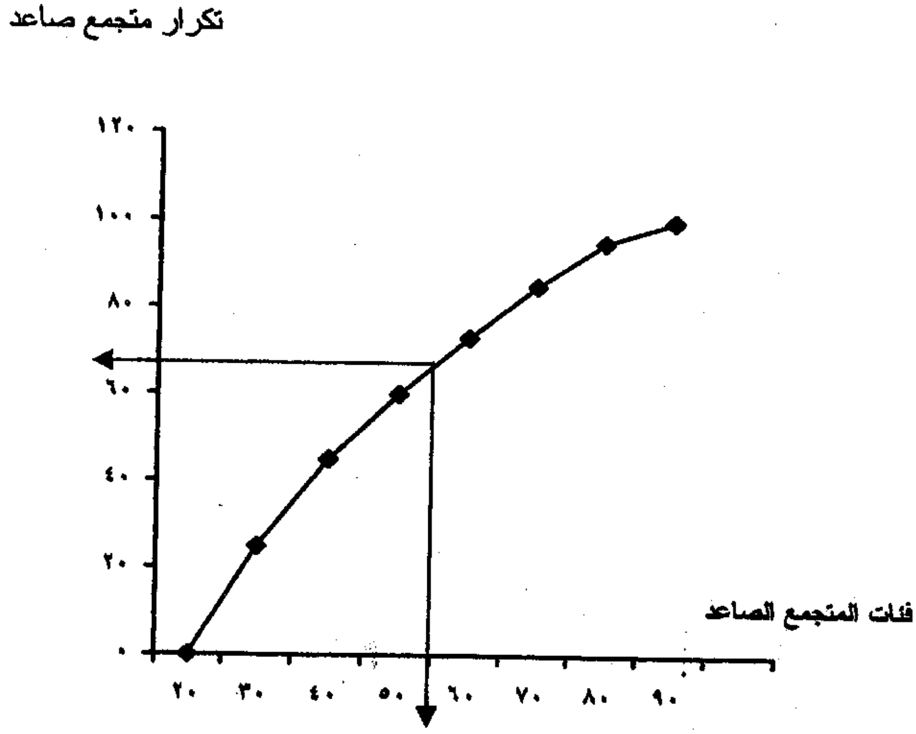
فئات الدخل	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-٩٠
عدد العمال	٢٥	٢٠	١٥	١٣	١٢	١٠	٥

المطلوب :

رسم المنحنى المتجمع الصاعد وإيجاد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن (٥٥) جنيه.

الحل

ف	ك	فئات المتجمع الصاعد	تكرار متجمع صاعد
٢٠-	٢٥	أقل من ٢٠	صفر
٣٠-	٢٠	أقل من ٣٠	٢٥
٤٠-	١٥	أقل من ٤٠	٤٥
٥٠-	١٣	أقل من ٥٠	٦٠
٦٠-	١٢	أقل من ٦٠	٧٣
٧٠-	١٠	أقل من ٧٠	٨٥
٨٠-٩٠	٥	أقل من ٨٠	٩٥
		أقل من ٩٠	١٠٠
مجـ	١٠٠		



عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيه = ٦٧ عامل

(٢٠) من المثال السابق المطلوب :

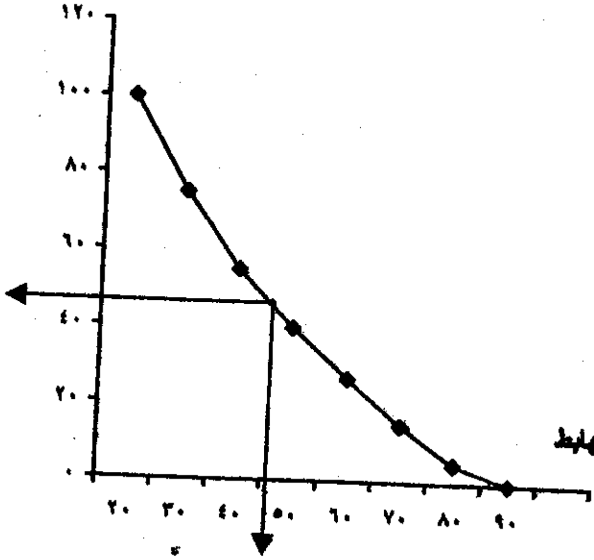
رسم المنحنى الهابط وإيجاد عدد العمال اللذين تزيد أجورهم عن (٤٥) جنيهاً.

الحـــــــل

ف	ك	فئات المتجمع الهابط	تكرار متجمع هابط
-٢٠	٢٥	٢٠ فأكثر	١٠٠
-٣٠	٢٠	٣٠ فأكثر	٧٥
-٤٠	١٥	٤٠ فأكثر	٥٥
-٥٠	١٣	٥٠ فأكثر	٤٠
-٦٠	١٢	٦٠ فأكثر	.
-٧٠	١٠	٧٠ فأكثر	١،
٩٠-٨٠	٥	٨٠ فأكثر	٥
		٩٠ فأكثر	صفر
مجـــ	١٠٠		

تكرار متجمع هابط

منحنى متجمع هابط



فئات المتجمع الهابط

عدد العمال الذين تزيد أجورهم من (٤٥) جنيه = ٤٨ عامل

(٢٥) الآتى يمثل بيانات عينة من (١٠٠) طالب.

فئات العمر	١٠-	١٢-	١٤-	١٦-	١٨-	٢٠-٢٢
عدد الطلاب	٧	١٥	٢٥	٣٠	١٥	١٠

المطلوب :

١- رسم المنحنى المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع الهابط.

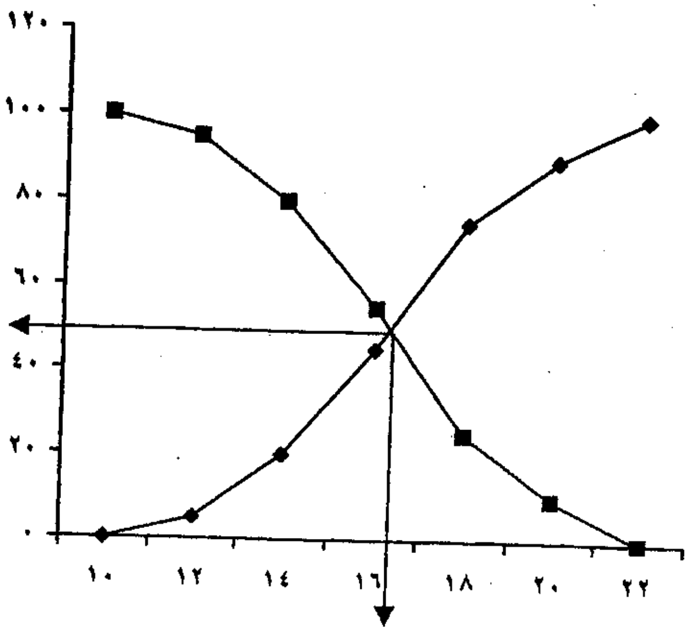
٢- إيجاد عدد الطلاب اللذين تتراوح أعمارهم بين (١٣، ١٨) سنة.

٣- إيجاد الوسيط من الرسم.

الحـــــــل

جدول صاعد   جدول هابط

ف	ك	فئات المتجمع الصاعد	تكرار متجمع صاعد	فئات المتجمع الهابط	تكرار متجمع هابط
١٠-	٥	أقل من ١٠	صفر	١٠ فأكثر	١٠٠
١٢-	١٥	أقل من ١٢	٥	١٢ فأكثر	٩٥
١٤-	٢٥	قل من ١٤	٢٠	١٤ فأكثر	٨٠
١٦-	٣٠	أقل من ١٦	٤٥	١٦ فأكثر	٥٥
١٨-	١٥	أقل من ١٨	٧٥	١٨ فأكثر	٢٥
٢٠-٢٢	١٠	أقل من ٢٠	٩٠	٢٠ فأكثر	١٠
		أقل من ٢٢	١٠٠	٢٢ فأكثر	صفر
مجـــ	١٠٠				



من الرسم السابق يتضح الآتى :

أولاً : عدد الطلاب اللذين تقل أعمارهم عن ١٨ سنة.

من المنحنى المتجمع الصاعد نجد أن عددهم هو ٧٥ طالب .... (١)

ثانياً : عدد الطلاب اللذين تزيد أعمارهم عن ١٣ سنة.

من المنحنى المتجمع الهابط نجد أن عددهم هو ٨٨ طالب ...... (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن

عدد الطلاب اللذين تتراوح أعمارهم بين (١٣، ١٨) سنة.

هو عدد الطلاب اللذين تزيد أعمارهم عن (١٣) سنة وفى نفس الوقت تقل عن (١٨) سنة والذى يساوى (٨٨ – ٧٥) = ١٣ طالباً.

ثالثاً : لإيجاد الوسيط من الرسم :

نقطة تقاطع المنحنى الصاعد مع المنحنى الهابط.

- على المحور الرأسى تعطى موقع الوسيط = ٥٠
- على المحور الأفقى تعطى قيمة الوسيط = ١٦,٣

(٢٦) المـثال الآتــى يمثل المساحة المزروعة موالح بالألف فدان فى (٥) محافظات خلال السنة الماضية :

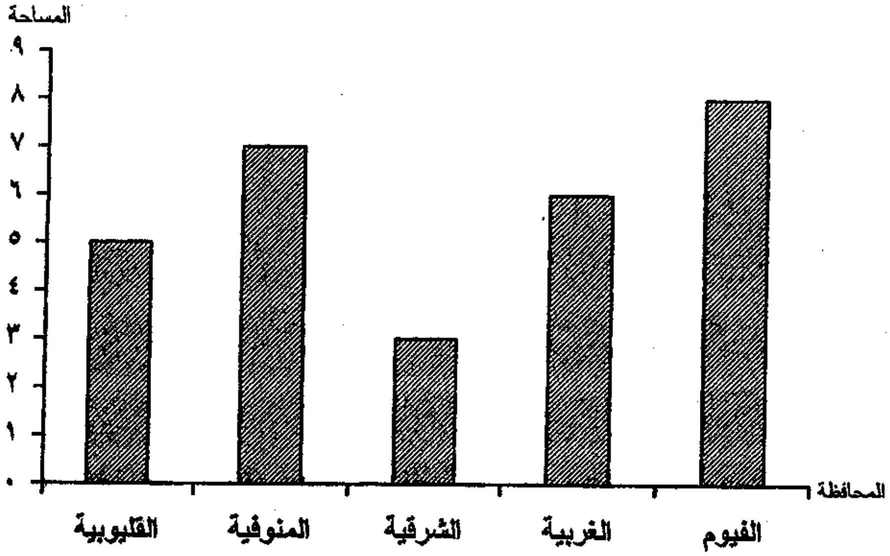
المحافظة	القليوبية	المنوفية	الشرقية	الغربية	الفيوم
المساحة	٥	٧	٣	٦	٨

المطلوب :

عــرض الظاهرة بطريقة تمكن من مقارنة المساحات المزروعة موالح فى المحافظات المختلفة (طريقة الأعمدة).

الحــــــل

شكل بيانى يوضح المساحة المزروعة موالح فى (٥) محافظات



(٢٧) البيان التالى يوضح الودائع بالمليون جنيه لدى بنك مصر فى آخر ديسمبر من كل عام خلال الفترة من ١٩٨٥ حتى ١٩٩٠ :

السنة	الودائع بالمليون جنيه
١٩٨٥	٥٠٠
١٩٨٦	٥٥٥
١٩٨٧	٨٠٠
١٩٨٨	٧٧٥
١٩٨٩	١٠٠٠
١٩٩٠	١٤٠٠

المطلوب : عرض تلك البيانات باستخدام الأعمدة

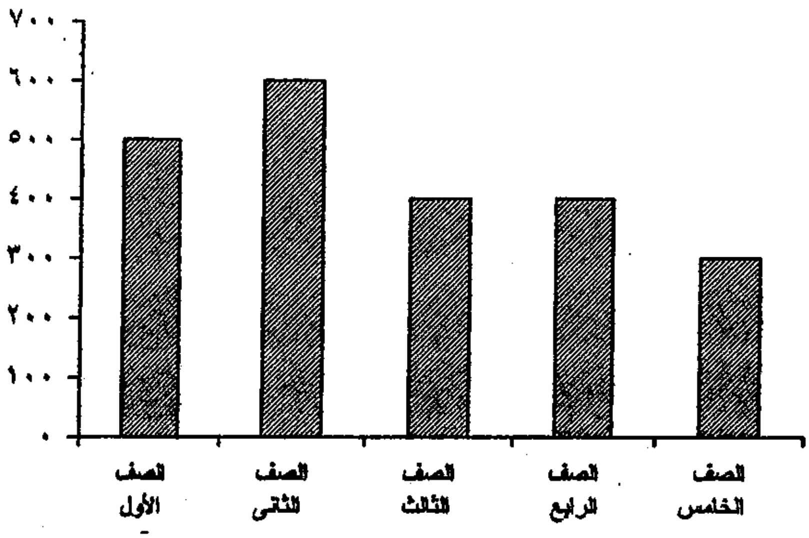
الحـــــل

الودائع لدى بنك مصر

(٢٨) إذا أراد أحـــد نظـــار المدارس الابتدائية عرض بيان بتوزيع تلاميذ المدرسة فى صورة أعمدة وكانت البيانات كما يلى :

الصف	عدد التلاميذ
الأول	٥٠٠
الثانى	٦٠٠
الثالث	٤٠٠
الرابع	٤٠٠
الخامس	٣٠٠

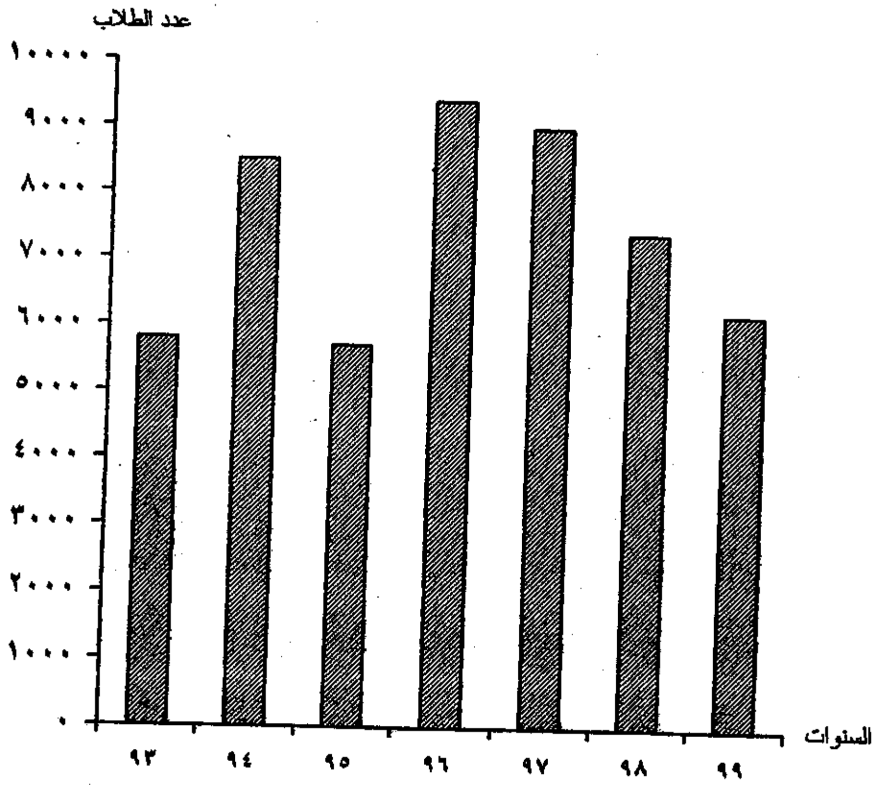
المطلوب : عرض تلك البيانات باستخدام الأعمدة



(٢٩) فــيما يلى عدد الطلاب بالمعاهد العليا المتوسطة فى محافظة ما فى الأعوام من ١٩٩٣ - ١٩٩٩ وضح فى شكل أعمدة.

السنوات	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩
عدد الطلاب	٥٨٠٠	٨٥٠٠	٥٧٠٠	٩٤٠٠	٩٠٠٠	٧٤٠٠	٦٢٠٠

الحـــــل

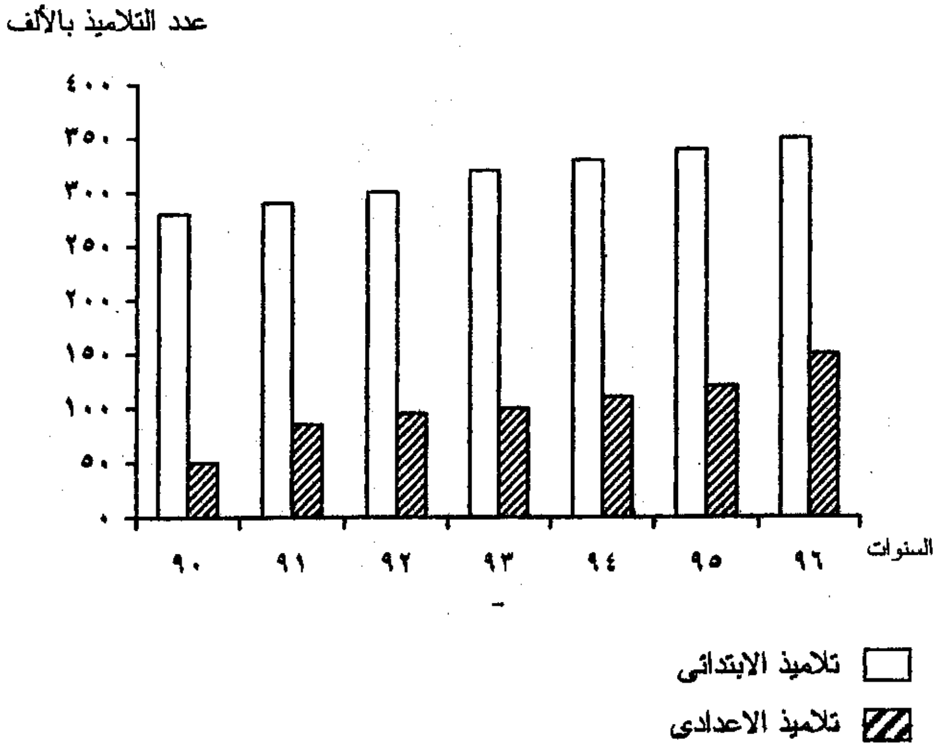


(٣٠) فـيما يلـى عدد تلاميذ التعليم الابتدائى والاعدادى فى احدى المحافظات خلال الفترة من ١٩٩٠ إلى ١٩٩٦.

السنوات	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦
تلاميذ الابتدائى بالألف	٢٨٠	٢٩٠	٣٠٠	٣٢٠	٣٣٠	٣٤٠	٣٥٠
تلاميذ الاعدادى بالألف	٥٠	٨٥	٩٥	١٠٠	١١٠	١٢٠	١٥٠

اعرض البيانات السابقة فى شكل الاعمدة

الحـــــــل



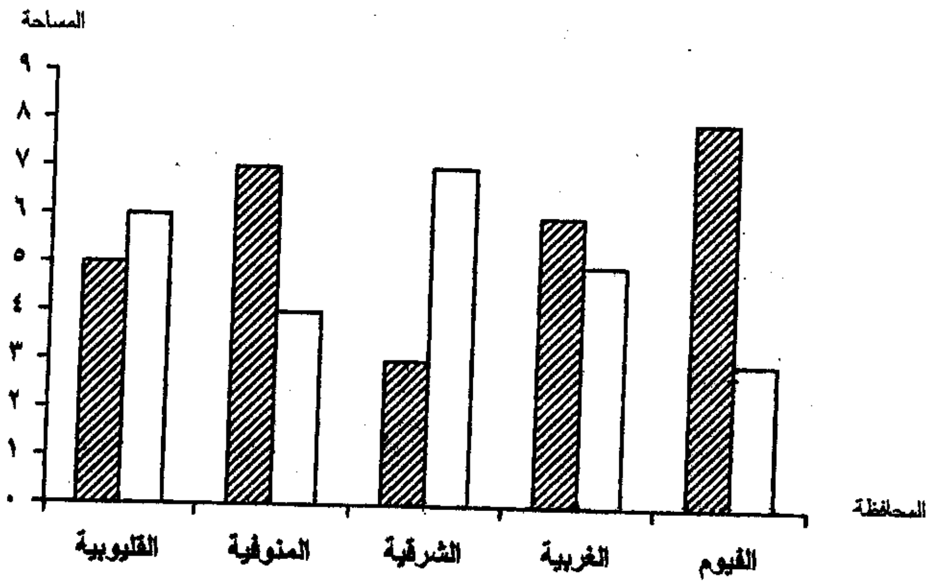
(٣١) الآتـــى يمثل المساحة المزروعة موالح والمساحة المزروعة بطيخ بالالف فدان فى (٥) محافظات خلال السنة الماضية.

المحافظة	القليوبية	المنوفية	الشرقية	الغربية	الفيوم
المساحة المزروعة موالح	٥	٧	٣	٦	٨
المساحة المزروعة بطيخ	٦	٤	٧	٥	٣

المطلوب :

عـــرض البيانات السابقة بطريقة تمكن من مقارنة المساحات المرزوعة بكل محصول في المحافظات المختلفة.

الحـــــــل

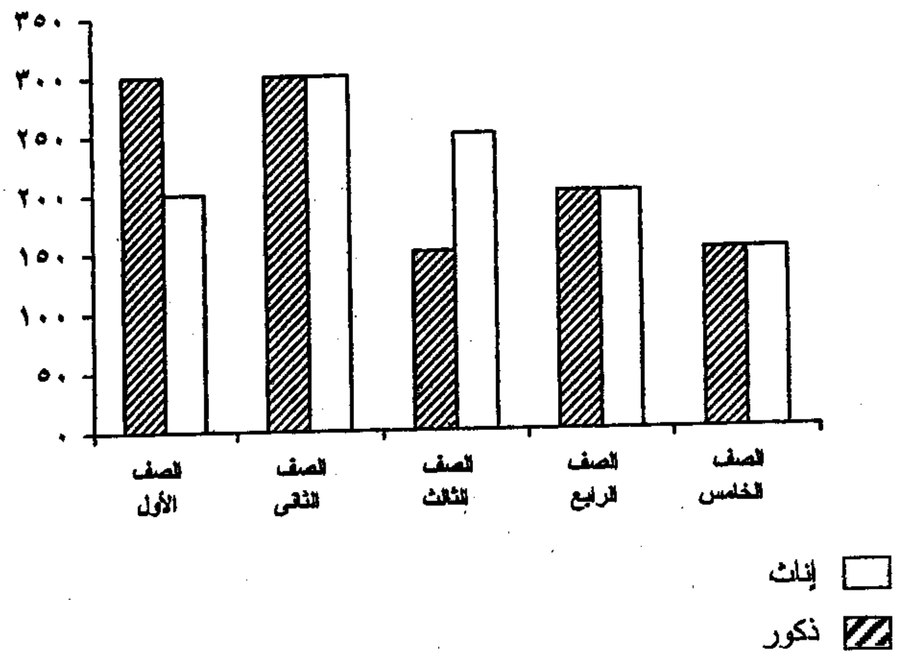


(٣٢) فـيما يلى بيانات عن الطلاب الذكور والاناث فى المرحلة الابتدائية من الصف الأول إلى الصف الخامس فى أحدى المدارس.

الصف	ذكور	إناث
الأول	٣٠٠	٢٠٠
الثانى	٣٠٠	٣٠٠
الثالث	١٥٠	٢٥٠
الرابع	٢٠٠	٢٠٠
الخامس	١٥٠	١٥٠

أعرض فى شكل أعمدة متلاصقة.

الحـــــــل



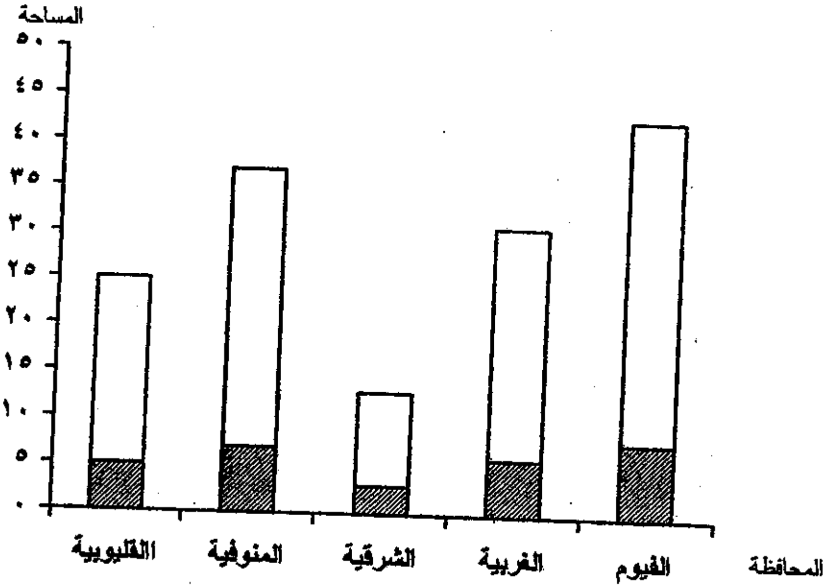
(٣٣) فيما يلى البيانات التالية :

المحافظة	القليوبية	المنوفية	الشرقية	الغربية	الفيوم
المساحة المزروعة فاكهة	٢٥	٣٧	١٣	٣٠	٤٥
المساحة المزروعة موالح	٥	٧	٣	٦	٨

المطلوب :

عرض الظاهرة السابقة فى شكل أعمدة مجزأة.

الحـــــل



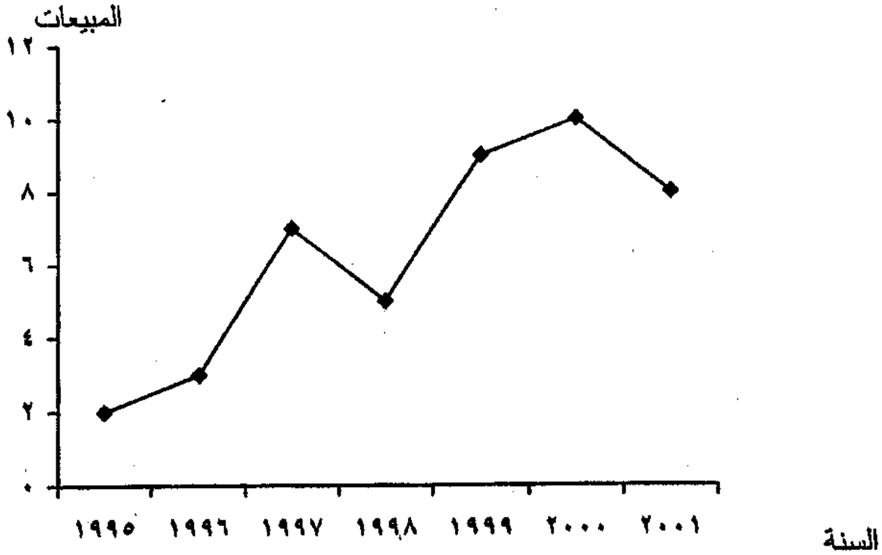
(٣٤) الآتى يمثل مبيعات إحدى الشركات بعشرات الملايين من الجنيهات.

السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١
المبيعات	٢	٣	٧	٥	٩	١٠	٨

المطلوب :

عرض البيانات السابقة بصورة تمكن من معرفة تطور المبيعات (خط بيانى).

الحـــــــل

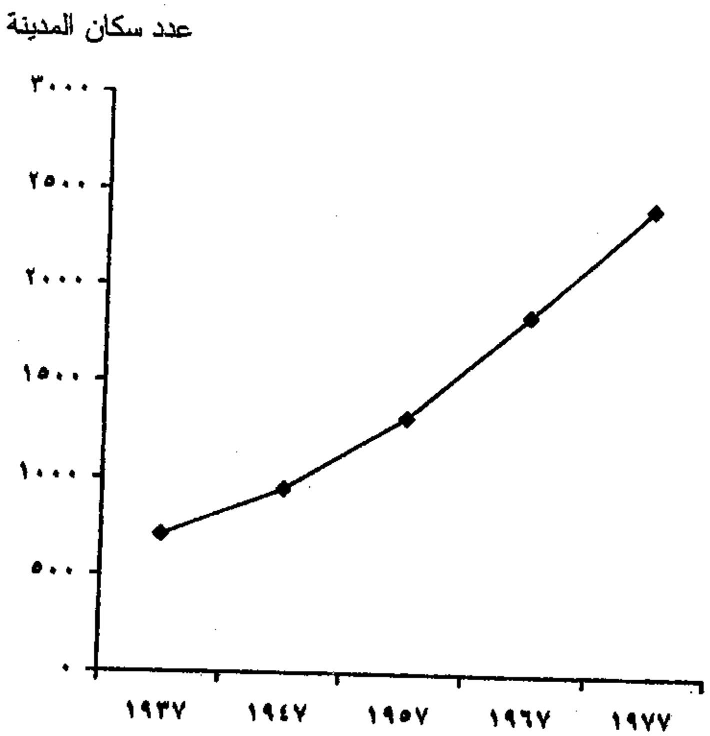


(٣٥) فـيما يلـى التغيرات التى حدثت على عدد سكان إحدى المدن خلال الفترة من ١٩٣٧ حتى ١٩٧٧.

السنوات	١٩٣٧	١٩٤٧	١٩٥٧	١٩٦٧	١٩٧٧
عدد السكان (بالألف نسمة)	٧١٠	٩٥٠	١٣٢٠	١٨٥٠	٢٤٢٠

أعرض فى شكل خط بيانى.

الحـــــــل

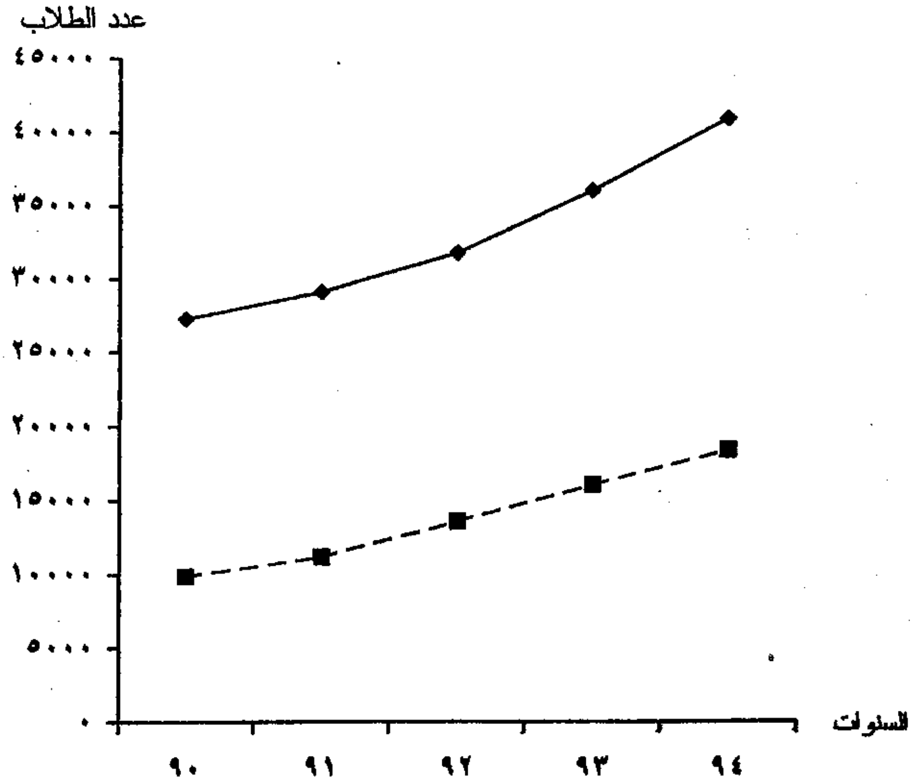


(٣٦) فــيما يلــى أعــداد الطلاب والطالبات فى التعليم الجامعى فى محافظة ما خلال الفترة من ١٩٩٠ – ١٩٩٤.

السنة	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤
عدد الطلبة	٢٧٠٠٠	٢٩٠٠٠	٣٢٠٠٠	٣٦٠٠٠	٤٢٠٠٠
عدد الطالبات	٩٩٠٠	١١٠٠٠	١٤٠٠٠	١٦٠٠٠	١٨٠٠٠

أعرض فى شكل خط بيانى لكل من أعداد الطلبة وأعداد الطالبات

الحـــــل



—— طلبة

------ طالبات

(٣٧) إذا كـــان توزيـــع الصــــادرات خلال العام السابق بمئات الملايين من الجنيهات كالآتى :

الدول	آسيوية	أفريقية	أوروبية	أمريكية	المجموع
قيم الصادرات	٦٠	٤٠	٧٠	١٠	١٨٠

المطلوب :

عرض ظاهرة الصادرات لبيان الأهمية النسبية لقيمة الصادرات لكل قارة (بالدائرة).

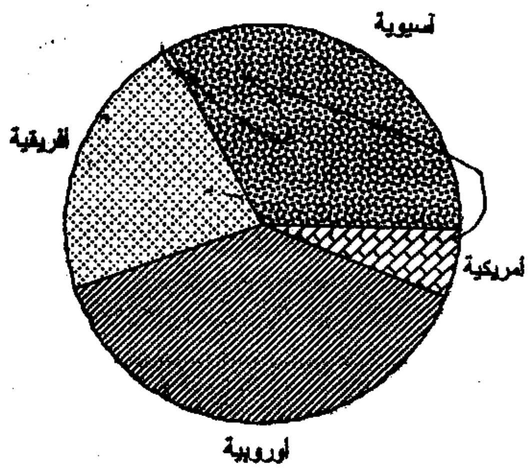
الحـــــل

نصيب الدول الآسيوية من الدرجات = $\frac{٦٠}{١٨٠} \times ٣٦٠ = ١٢٠°$

نصيب الدول الأفريقية من الدرجات = $\frac{٤٠}{١٨٠} \times ٣٦٠ = ٨٠°$

نصيب الدول الأوروبية من الدرجات = $\frac{٦٠}{١٨٠} \times ٣٦٠ = ١٤٠°$

نصيب الدول الأمريكية من الدرجات = $\frac{١٠}{١٨٠} \times ٣٦٠ = ٢٠°$



الباب الثالث

مقاييس النزعة المركزية او الموضع

«المتوسطات»

Measures of Central Tendency
"Averages"

المقاييس الرقمية التى تعطى بايجاز وبدقة القيمة المركزية التى يمكن قبولها لتمثل عدد من المشاهدات. هذه المقاييس يطلق عليها مقاييس النزعة المركزية أو مقاييس المتوسط.

وكلمة المتوسط هى أحد مفردات حديثنا اليومى فى أى مجال من مجالات الحياة.. فنحن نتكلم عن متوسط الأجر الشهرى للعاملين فى شركة معينة - فى صناعة معينة، متوسط الدرجات فى مادة معينة - فى فرقة معينة، متوسط السعر لسلعة معينة (خلال فترة زمنية) أو متوسط سعر السلع المختلفة فى قطاع معين، متوسط عدد ساعات مذاكرة طالب فى الشهر ... إلخ.

وتشير النزعة المركزية إلى ميل القيم إلى التجمع حول قيمة معينة هذه القيمة تسمى بالقيمة المتوسطة *Average* وهذه القيمة تميل إلى الوقوع فى المركز لذلك فإن المقاييس التى تستخدم فى قياس هذه القيمة وتحديدها تسمى بمقاييس النزعة المركزية. ويوجد هناك عدة مقاييس للنزعة المركزية لكل منها مميزاته وعيوبه وطرق حسابه وتعدد هذه المقاييس أمر طبيعى حيث أن البيانات تختلف فى طبيعتها لذلك فإن معرفة طبيعة هذه البيانات يساعد فى إختيار المقياس المناسب.

وأهم مقاييس النزعة المركزية هى : الوسط الحسابى، الوسط المرجح، الوسيط، المنوال، الوسط الهندسي، الوسط التوافقى.

أولاً: الوسط الحسابى (المتوسط) Mean or Arithmetic Mean

يعتبر الوسط الحسابى من أهم وأبسط مقاييس النزعة المركزية، لأنه يدخل فى كثير من عمليات التحليل الإحصائى، مثل المقارنة بين المجموعات المختلفة وغيرها.

ويمكن تعريف الوسط الحسابى بأنه القيمة التى لو أعطيت لجميع المفردات لكان مجموعها يساوى مجموع القيم الأصلية للمفردات ويمكن حساب الوسط الحسابى بطريقتين تبعاً لطبيعة البيانات المدروسة، وذلك فى الحالتين التاليتين :

أ- البيانات غير المبوبة   ب- البيانات المبوبة.

الوسط الحسابى لبيانات غير مبوبة Ungrouped data

يعَرّف الوسط الحسابى فى حالة البيانات غير المبوبة بأنه مجموع "مجـ" للمشاهدات مقسوماً على عددها "ن" أى أنه إذا كان لدينا المشاهدات أو القراءات

$\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ، .... ، $\text{س}_{\text{ن}}$

فإن الوسط الحسابى الذى سوف يرمز له بالرمز $\bar{\text{س}}$ يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} + \dots + \text{س}_{\text{ن}}}{\text{ن}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

مثال :

عند دراسة الأجور اليومية لمجموعتين من العمال فى مؤسستين كان الأجر اليومى بالجنيه المصرى كالآتى :

أجور عمال المؤسسة الأولى س : ٣٠ ، ٤٠ ، ٤٥ ، ٤٠ ، ٣٥ ، ٣٠ ، ٣٠ ، ٤٠

أجور عمال المؤسسة الثانية ص : ١٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ٤٠ ، ٣٠ ، ٤٠

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابى لأجور العمال لكل مؤسسة.

لإيجاد الوسط الحسابى فإننا نستخدم العلاقة السابقة $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$ لنجد أن :

$$\bar{س} = \frac{٣٠ + ٤٠ + ٤٥ + ٤٠ + ٣٥ + ٣٠ + ٣٠ + ٤٠}{٨}$$

$$= \frac{٢٩٠}{٨} = ٣٦,٢٥ \quad \text{جنيه}$$

$$\bar{ص} = \frac{١٥ + ٣٠ + ٢٥ + ٤٠ + ٣٠ + ٤٠}{٦} = \frac{١٨٠}{٦} = ٣٠ \quad \text{جنيه}$$

الوسط الحسابى المرجح Weighted Mean

عند حساب قيمة الوسط الحسابى أعطينا جميع القراءات نفس الأهمية، ونفس الوزن، وإن كان من الصعب تبرير ذلك فى بعض تطبيقات الحياة العملية، وذلك لأن بعض القيم لها أهمية أكبر من الأخرى، فمثلاً عند إيجاد متوسط درجات طالب فى المواد المختلفة له فليس من المعقول مساواة درجة مادة تدرس فى ساعتين بمادة تدرس فى أربع ساعات كل أسبوع أو ثلاث ساعات لذلك كان لابد من إعطاء أوزان لدرجات المواد المختلفة حسب الساعات الأسبوعية، ويسمى حساب الوسط الحسابى فى هذه الحالة بالوسط الحسابى المرجح، ويُرمز له بالرمز $\bar{س}_م$. ويُعرف بأنه مجموع حاصل ضرب القراءات فى الأوزان المناظرة لها مقسوماً على مجموع أوزان القراءات. ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بالصيغة التالية :

إذا كان لدينا مجموعة القراءات. $س_١$ ، $س_٢$ ، .... ، $س_ن$

ولتكن الأوزان المناظرة لها هى : $و_١$ ، $و_٢$ ، .... ، $و_ن$

فإن الوسط الحسابى المرجح يعطى بالعلاقة

$$\bar{س}_م = \frac{و_١ س_١ + و_٢ س_٢ + \ldots + و_ن س_ن}{و_١ + و_٢ + \ldots\ldots + و_ن} = \frac{مجـ و س}{مجـ و}$$

مثال:

إذا كانت درجات أحد الطلاب فى أربع مواد هى

$$٤٠ \text{ ، } ٧٠ \text{ ، } ٦٦ \text{ ، } ٨٥$$

وكانت الساعات الدراسية الأسبوعية لهذه المواد بالترتيب هى كالتالى :

$$٣ \text{ ، } ٢ \text{ ، } ٤ \text{ ، } ٣$$

والمطلوب إيجاد قيمة الوسط المرجح لدرجات هذا الطالب.

الحل:

$$\because \quad \bar{س}_م = \frac{\text{مجـ و س}}{\text{مجـ و}}$$

$$\therefore \quad \bar{س}_م = \frac{٣\times٤٠ + ٢\times٧٠ + ٤\times٦٦ + ٣\times٨٥}{٣ + ٢ + ٤ + ٣}$$

$$= \frac{٧٧٩}{١٢} = ٦٤,٩٢ \quad \text{درجة}$$

الوسط الحسابى لبيانات مبوبة Grouped data

إذا كان لدينا جدول يمثل توزيعاً تكرارياً لبيانات ما بحيث إن مراكز فئاته هى :

$$س_١ \text{ ، } س_٢ \text{ ، } \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ، } س_م$$

والتكرارات المناظرة لهذه الفئات هى :

$$ك_١ \text{ ، } ك_٢ \text{ ، } \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ، } ك_م$$

(حيث إن م عدد الفئات) فإننا فى هذه الحالة يعرف الوسط الحسابى $\bar{س}$ على إنه مجموع حاصل ضرب مراكز كل فئة فى التكرار المناظر لها مقسوماً على مجموع تكرار الفئات. ويمكن أن نعبر عن ذلك رياضياً بالصيغة التالية :

$$س\bar{} = \frac{ك_1 س_1 + ك_2 س_2 + \ldots\ldots + ك_م س_م}{ك_1 + ك_2 + \ldots\ldots + ك_م}$$

$$= \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

حيث محـ ك = مجموع التكرارات

ويمكن إيجاد الوسط الحسابى بالطرق العادية (المطولة) وبالطريقة المختصرة والطريقة الأكثر إختصاراً.

فإذا كان لدينا التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالب فى مادة الاحصاء وكان على النحو التالى :

الدرجة	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	المجموع
التكرار (عدد الطلاب)	٨	١٢	١٦	١٠	٤	٥٠

والمطلوب : إيجاد الوسط الحسابى لدرجات الطلاب الخمسين.

أ- الوسط الحسابى بالطريقة العادية أو المطولة :

لحساب الوسط الحسابى بالطريقة المطولة فإننا نحصل على مراكز الفئات (س) ثم نحصل على التكرارات (ك) × مراكز الفئات (س) ثم نعوض فى القانون الآتى لنحصل على الوسط الحسابى :

$$س\bar{} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$$

جدول رقم (٣-١)

فئات الدرجات	عدد الطلاب (ك) التكرارات	مراكز الفئات س	مراكز الفئات × التكرارات س × ك
-٥٠	٨	٥٥	٤٤٠
-٦٠	١٢	٦٥	٧٨٠
-٧٠	١٦	٧٥	١٢٠٠
-٨٠	١٠	٨٥	٨٥٠
٩٠-١٠٠	٤	٩٥	٣٨٠
المجموع	٥٠		٣٦٥٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٣٦٥٠}{٥٠} = ٧٣ \quad \text{درجة}$$

ب- الوسط الحسابى بالطريقة المختصرة :

من الملاحظ أن الطريقة المطولة قد تكون أكثر تعقيداً إذا كانت التكرارات كبيرة أو إذا كانت مراكز الفئات كبيرة أو احتوت مراكز الفئات على كسور كبيرة لذلك يمكن استخدام الطريقة المختصرة باستخدام وسط فرضى لتبسيط العمليات الحسابية والوصول إلى نفس النتيجة حيث نطرح هذا الوسط الفرضى (أ) (مقدار ثابت) من مراكز الفئات فنحصل على انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الفرضى ونرمز لهذا الانحراف بالرمز (ح) ثم نحصل على حاصل ضرب التكرارات فى انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الفرضى. ثم نطبق القانون التالى :

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} + \text{أ} \qquad \text{حيث أ هوالوسط الفرضى}$$

جدول رقم (٣-٢)

فئات الدرجات	عدد الطلاب التكرارات (ك)	مراكز الفئات س	انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الفرضى ح	ح × ك
-٥٠	٨	٥٥	- ٢٠	- ١٦٠
-٦٠	١٢	٦٥	- ١٠	- ١٢٠
-٧٠	١٦	٧٥	صفر	صفر
-٨٠	١٠	٨٥	+ ١٠	١٠٠
٩٠-١٠٠	٤	٩٥	+ ٢٠	٨٠
المجموع	٥٠			- ١٠٠

الوسط الفرضى أ هو = ٧٥

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} + أ = \frac{-١٠٠}{٥٠} + ٧٥ = -٢ + ٧٥ = ٧٣ \text{ درجة}$$

جـ- الوسط الحسابى بالطريقة الاكثر إختصاراً:

بالنظر إلى الجدول السابق نلاحظ أن العمود الثالث وهو الذى يشمل انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الفرضى (ح) يقبل كل منها القسمة على مقدار ثابت وهو (١٠) (وهو طول الفئة) ونتيجة هذه القسمة نحصل على الانحراف الجديد أو الانحراف المختصر حَ ثم نحصل على حَ × ك.

ولإيجاد الوسط الحسابى نقوم بإجراء عملية تصحيح للعمليات السابقة بأن نضرب مجـ(حَ × ك) × طول الفئة، ونقسم على مجـ ك ثم نضيف المقدار السابق طرحه (أ) المقدار الثابت أو ما أطلقنا عليه الوسط الفرضى.

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ حَ ك}}{\text{مجـ ك}} \times ل + أ$$ حيث ل: طول الفئة

جدول رقم (٣-٣)

فئات الدرجات	عدد الطلاب التكرارات (ك)	مراكز الفئات س	انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الفرضى ح	الانحراف المختصر $ح' = \frac{ح}{ل}$	ح' × ك
٥٠-	٨	٥٥	٢٠-	٢-	١٦-
٦٠-	١٢	٦٥	١٠-	١-	١٢-
٧٠-	١٦	٧٥	صفر	صفر	صفر
٨٠-	١٠	٨٥	١٠	١	١٠
٩٠-١٠٠	٤	٩٥	٢٠	٢	٨
المجموع	٥٠				١٠-

$$س' = \frac{مجـ ح' ك}{مجـ ك} \times ل + أ = \frac{-١٠}{٥٠} \times ١٠ + ٧٥ = \frac{-١٠٠}{٥٠} + ٧٥$$

$$= -٢ + ٧٥ = ٧٣ \quad \text{درجة}$$

مميزات الوسط الحسابى:-

١- يأخذ جميع القيم محل الدراسة فى الاعتبار.

٢- يستخدم فى معظم التحليلات الإحصائية لسهولة التعامل معه.

٣- لا يحتاج فى حسابه إلى ترتيب البيانات.

٤- مقياس سهل حسابه ويخضع للعمليات الجبرية بسهولة.

عيوب الوسط الحسابى:

١- يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة) للبيانات وهى القيم الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً مقارنة ببقية القيم.

٢- يصعب حسابه فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة حيث يتطلب معرفة مركز كل فئة.

٣- لا يمكن حسابه فى حالة البيانات الوصفية.

الخواص الرياضية للوسط الحسابى:

(١) المجموع الجبرى لانحرافات القيم عن الوسط الحسابى يساوى صفراً :

ونصل إليها لو أخـذنا فى الاعتبار انحـراف كل قيمة عن وسطها الحـسابى،حيث نحصل على انحرافات بعضـها موجباً وبعضها سالباً، أى أن المجـموع الجبرى لانحرافات القيم عن وسطها الحسابى يساوى صفراً أى إذا كانت مجموعة المشاهدات

هى $س_١$ ، $س_٢$ ، .... ، $س_ن$ وانحرافاتها عن وسطها الحسابى

هى $د_١$ ، $د_٢$ ، .... ، $د_ن$ حيث $د = س_ر - \bar{س}$ ،

$ر = ١ ، ٢ ، .... ، ن$

$$\text{فان } \sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س}) = \sum_{ر=١}^{ن} د_ر = \text{صفر}$$

$$\text{الاثبات : } \bar{س} = \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$$

$$\text{بضرب الطرفين } \times ن \quad \bar{س} = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س}) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر - \sum_{ر=١}^{ن} \bar{س}$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} س_ر - ن\,\bar{س}$$

$$= ن\,\bar{س} - ن\,\bar{س} = \text{صفر}$$

ويتضح ذلك فيما يلى القيم ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ الوسط الحسابى $= \frac{٣٠}{٥} = ٦$

القيم	٢	٤	٦	٨	١٠
انحراف كل قيمة عن الوسط الحسابى	٢−٦=−٤	٤−٦=−٢	٦−٦=صفر	٨−٦=٢	١٠−٦=٤

ويلاحظ أن مجموع انحرافات القيم عن الوسط الحسابى= -٤ - ٢ + صفر + ٢ + ٤ = صفر

(٢) إذا أضيف لقيم مفردات متغير معين مقدار ثابت فاننا تحصل على قيم مفردات جديدة لمتغير جديد. ويكون الوسط الحسابى لقيم مفردات المتغير الأصلى هو عبارة عن الوسط الحسابى لقيم مفردات المتغيرالجديد مطروحاً منه المقدار الثابت.

ويمكن التوصل إليها لو أخذنا فى الاعتبار إضافة مقدار ثابت على جميع القيم الأصلية. ففى هذه الحالة نحصل على قيم جديدة. وعلى أساس الوسط الحسابى للقيم الجديدة نصل إلى الوسط الحسابى للقيم الأصلية: فإذا كان للمتغير س المشاهدات

$\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ، . . . . $\text{س}_{\text{ن}}$ فإذا أضفنا إلى القيم الأصلية للمشاهدات مقدار ثابت ب فان الانحرافات $\text{د}_{١}$ ، $\text{د}_{٢}$ ، . . . . $\text{د}_{\text{ن}}$ حيث $\text{د}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} + \text{ب}$ وحيث

ر = ١ ، ٢ ، . . . . ، ن تعطى المتوسط كالتالى : $\bar{\text{س}} = \bar{\text{د}} + \text{ب}$

الاثبات : $\text{د}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} + \text{ب}$ حيث ر = ١ ، ٢ ، . . . . . ، ن

$$\text{فان } \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} + \text{ب}) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} + \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ب}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} + \text{ن ب}$$

بقسمة الطرفين على (ن)

$$\frac{١}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{د}_{\text{ر}} = \frac{١}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} + \frac{\text{ن}}{\text{ن}} \text{ب}$$

أى أن $\bar{\text{د}} = \bar{\text{س}} + \text{ب}$

وعليه فان $\bar{\text{س}} = \bar{\text{د}} - \text{ب}$

ويتضح ذلك فيما يلى : القيم ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ المقدار الثابت المضاف = ٢ مثلاً

القيم الأصلية	٢	٤	٦	٨	١٠
القيم الجديدة	٢+٢=٤	٤+٢=٤	٦+٢=٤	٨+٢=١٠	١٠+٢=١٢

الوسط الحسابى للقيم الجديدة = = $\frac{٤ + ٦ + ٨ + ١٠ + ١٢}{٥} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$

والوسط الحسابى للقيم الأصلية =

الوسط الحسابى للقيم الجديدة - المقدار الثابت المضاف = ٨ - ٢ = ٦

(٣) إذا طرح من قيم مفردات متغير معين مقدار ثابت فاننا نحصل على قيم مفردات جديدة لمتغير جديد، ويكون الوسط الحسابى لقيم مفردات المتغير الأصلى هو عبارة عن الوسط الحسابى لقيم مفردات المتغير الجديد مضافاً إليه المقدار الثابت.

ويمكن تحديدها لو طرحنا مقدار ثابت من جميع القيم الأصلية، فإن باقى طرح القيم الأصلية يمثل قيم جديدة، وعلى أساس الوسط الحسابى للقيم الجديدة نصل إلى الوسط الحسابى للقيم الأصلية.

ويتضح ذلك فيما يلى: القيم ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ المقدار الثابت المطروح = ٢ مثلاً

القيم الأصلية	٢	٤	٦	٨	١٠
القيم الجديدة	٢-٢= صفر	٤-٢= ٢	٦-٢= ٤	٨-٢= ٦	١٠-٢= ٨

ويكون الوسط الحسابى للقيم الجديدة = $\frac{\text{صفر} + ٢ + ٤ + ٦ + ٨}{٥} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$

والوسط الحسابى للقيم الأصلية

= الوسط الحسابى للقيم الجديدة + المقدار الثابت المطروح = ٤ + ٢ = ٦

(٤) إذا ضربت قيم مفردات متغير معين فى مقدار ثابت فاننا نحصل على قيم مفردات جديدة لمتغير جديد، ويكون الوسط الحسابى لقيم مفردات المتغير الجديد مقسوماً على المقدار الثابت.

وتتحدد بضرب جميع القيم الأصلية فى مقدار ثابت، ويكون خاصل ضرب القيم الأصلية فى هذا المقدار الثابت ممثلاً لقيم جديدة، وعلى أساس الوسط الحسابى للقيم الجديدة نصل إلى الوسط الحسابى للقيم الأصلية.

ويتضح ذلك فيما يلى : القيم ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠ المقدار الثابت المضروب = ٢ مثلاً

القيم الأصلية	٢	٤	٦	٨	١٠
القيم الجديدة	٤=٢×٢	٨=٢×٤	١٢=٢×٦	١٦=٢×٨	٢٠=٢×١٠

ويكون الوسط الحسابى للقيم الجديدة = $\frac{٤ + ٨ + ١٢ + ١٦ + ٢٠}{٥} = \frac{٦٠}{٥} = ١٢$

والوسط الحسابى للقيم الأصلية

الوسط الحسابى للقيم الجديدة ÷ المقدار الثابت = ١٢ ÷ ٢ = ٦

(٥) إذا قسمت قيم مفردات متغير معين على مقدار ثابت فاننا نحصل على قيم مفردات جديدة لمتغير جديد، يكون الوسط الحسابى لقيم مفردات المتغير الجديد مضروباً فى المقدار الثابت.

وتتحدد بقسمة جميع القيم الأصلية على مقدار الثابت ويكون خارج قسمة القيم الأصلية على هذا المقدار الثابت عبارة عن قيم جديدة وعلى أساس الوسط الحسابى للقيم الجديدة نصل إلى الوسط الحسابى للقيم الأصلية

ويتضح ذلك فيما يلى: القيم ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ المقدار الثابت المقسوم = ٢ مثلاً

القيم الأصلية	٢	٤	٦	٨	١٠
القيم الجديدة	١=٢÷٢	٢=٢÷٤	٣=٢÷٦	٤=٢÷٨	٥=٢÷١٠

ويكون الوسط الحسابى للقيم الجديدة = $\frac{١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

والوسط الحسابى للقيم الأصلية

= الوسط الحسابى للقيم الجديدة × المقدار الثابت = ٣ × ٢ = ٦.

والخصائص الرياضية السابقة بالإضافة إلى ما تسبغه من أهمية علمية للوسط الحسابى فانه يمكن الاستفادة منها فى الحصول على الوسط الحسابى بطريقة سهلة مختصرة فى حالة القيم الكبيرة أو التوزيعات التكرارية ذات الفئات والتكرارات الكبيرة العدد.

ثانيا: الوسيط Median

عند ترتيب البيانات (أو المشاهدات) ترتيباً تصاعدياً (أو تنازلياً) فالوسيط يكون هو القيمة التى يقع ٥٠٪ من البيانات قبلها فى الترتيب و ٥٠٪ من البيانات بعدها فى الترتيب. فإذا كان عدد البيانات فردياً يكون الوسيط هو المشاهدة التى فى المتصف وإذا كان عدد البيانات زوجياً فإن الوسيط هو متوسط المشاهدتين اللتين فى المتصف.

الوسيط لبيانات غير مبوبة: Ungrouped Data

لحساب الوسيط لبيانات غير مبوبة يجب ترتيب هذه القيم ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً، ثم نبحث فى عدد المفردات، فإذا كان العدد فردياً فيمكن معرفة الوسيط عن طريق تحديد قيمة المفردة الى تكون عدد المفردات الأقل منها مساوياً لعدد المفردات الأكبر منها.

حيث يكون ترتيب الوسيط = $\frac{N+١}{٢}$ حيث N عدد المفردات أما إذا كان عدد المفردات عدداً زوجياً فانه لا يوجد قيمة وسطى واحدة بل هناك قيمتين فى الوسط فاننا نحصل على متوسط هاتين القيمتين ونحدد ترتيب هاتين القيمتين على النحوالتالى : $\frac{N}{٢}$ ، $\frac{N}{٢}+١$.

مثال:

احسب قيمة الوسيط للبيانات التالية :

٤ ، ١٦ ، ٢٠ ، ٢٨ ، ١٥ ، ٩

الحل:

الترتيب	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)
القيم	٤	٧	٩	١٥	١٦	٢٠	٢٨

عدد القيم = ٧ قيم (فردى)

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{N + 1}{2} = \frac{7 + 1}{2} = 4$$

ويكون قيمة الوسيط = قيمة المفردة الرابعة فى الترتيب = ١٥

مثال:

فى المثال السابق بالاضافة إلى المفردات السبع إذا كان لدينا مفردة جديدة قيمتها ١٧ احسب قيمة الوسيط.

الحل:

الترتيب	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	(٨)
القيم	٤	٧	٩	١٥	١٦	١٧	٢٠	٢٨

عدد المفردات = ٨ قيم (زوجى)

∴ ترتيب الوسيط = الوسط الحسابى للمفردتين الذى ترتيبهما $\frac{N}{2}$ ، $\frac{N}{2} + 1$

= الوسط الحسابى للمفردتين $\frac{8}{2} = 4$ ، $\frac{8}{2} + 1 = 5$

$$\text{قيمة الوسيط} = \frac{\text{قيمة المفردة (٤) + قيمة المفردة (٥)}}{٢}$$

$$= \frac{١٥ + ١٦}{٢} = ١٥,٥$$

مثال:

فيما يلى تقديرات ١١ طالباً فى مادة الاحصاء [جيد ، جيد جداً ، مقبول ، مقبول ، ضعيف ، ممتاز ، جيد ، مقبول ، ضعيف جداً ، ضعيف، ممتاز].

المطلوب ايجاد وسيط التقديرات.

الحل

هنا نلاحظ خاصية هامة من خواص الوسيط والتى تميزه عن الوسط الحسابى .. فقى حين أن الوسط الحسابى لا يمكنه التعامل مع البيانات الوصفيه (غير الرقمية) فان الوسيط يمكنه ذلك .. ولكن مما تجب ملاحظته أن الوسيط يستطيع التعامل مع البيانات الكمية (الرقمية) والبيانات الوصفية القابلة للترتيب فقط، ولا يمكنه التعامل مع البيانات الوصفية غير القابلة للترتيب مثال الألوان (أصفر - أحمر - أخضر ... إلخ) أو الاجابات أو الصفات التى مثل (لا - نعم - لا أدرى - موجود - غير موجود - مريض - غير مريض ... إلخ).

ترتيب التقديرات : (تنازلى)

ممتاز ، ممتاز ، جيد جداً ، جيد ، جيد ، مقبول ، مقبول ، مقبول ، ضعيف ، ضعيف ، ضعيف جداً

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{ن + ١}{٢} = \frac{١١ + ١}{٢} = ٦$$

∴ تقدير المفردة السادسة هو وسيط التقديرات وهو : مقبول

∴ الوسيط هو «مقبول»

الوسيط لبيانات مبوبة : Grouped Data

يمكن الحصول على الوسيط من بيانات مبوبة إما فى الجداول التكرارية أو من الرسم حيث يعرف الوسيط للمنحنيات التكرارية بأنه قيمة المتغير التى إذا رسم عندها عموداً رأسيا فان يقسم المنحنى إلى جزئين متساويين.

أما عن الوسيط من خلال الجداول التكرارية، فانه عبارة عن القيمة التى تكون نصف التكرارات أقل منها والنصف الآخر أكبر منها، ويمكن الحصول على الوسيط من الجداول التكرارية وفقاً للخطوات الآتية :

أ- نكون جدول تكرارى متجمع صاعد أو هابط وعن طريقه يمكن معرفة قيمة الوسيط.

ب- ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$ = $\frac{\text{مجـ ك}}{٢}$ سواء كان مجموع التكرارات فردياً أم زوجياً.

جـ- عن طريق ترتيب الوسيط نحدد الفئة الوسيطية. ونحسب قيمة الوسيط كالآتى :

= بداية أو الحد الأدنى للفئة الوسيطية + $\frac{\text{ترتيب الوسيط – التكرار المتجمع السابق للفئة الوسيطية}}{\text{التكرار المتجمع اللاحق – التكرار المتجمع السابق}}$

× طول الفئة الوسيطية

ويمكن إيجاد الوسيط بيانياً برسم المنحنى المتجمع الصاعد، أو برسم المنحنى المتجمع الهابط (النازل)، أو برسمهما معا فى رسم واحد، ويمكن تحديد قيمة الوسيط فى كل حالة من الحالات الثلاث كما يلى :

١ - **الوسيط من المنحنى المتجمع الصاعد** : نرسم المنحنى المتجمع الصاعد من الجدول المتجمع الصاعد كما سبق شرحه، ونحدد بعد ذلك مكان «$\frac{\text{مجـ ك}}{٢}$» على المحور الرأسى الذى يمثل التكرارات المتجمعة، ويقابل المنحنى المتجمع الصاعد فى نقطة، ثم نسقط من النقطة عموداً رأسيا يقابل محور الفئات فى نقطة، فتكون القيمة التى تقع على محور الفئات هى الوسيط التى تقسم البيانات إلى قسمين متساويين.

٢ - **الوسيط من المنحنى المتجمع الهابط** : نرسم المنحنى المتجمع الهابط من الجدول المتجمع الهابط كما سبق شرحه، ونتبع الخطوات السابقة نفسها فى رسم المنحنى المتجمع الصاعد، وكذلك إيجاد قيمة الوسيط من الرسم.

٣ - **إيجاد الوسيط بيانياً باستخدام تقاطع المنحنى المتجمع الصاعد، والمتجمع الهابط معاً :**

نرسم أولاً كلاً من المنحنى المتجمع الصاعد، والمنحنى المتجمع الهابط على نفس المحورين، ومن نقطة تقاطع المنحنى نسقط عموداً رأسياً على محور الفئات، فيلتقى معه فى نقطة تعطينا القيمة البيانية للوسيط.

مثال :

احسب الوسيط للتوزيع التكرارى التالى :

فئات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-٦٠	المجموع
تكرارات	١٥	٢٠	٣٥	٢٥	٥	١٠٠

الحل

(١) التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط

جدول (٣-٤) الجدول المتجمع الصاعد

فئات المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٠	صفر
أقل من ٢٠	١٥
أقل من ٣٠	٣٥
أقل من ٤٠	٧٠
أقل من ٥٠	٩٥
أقل من ٦٠	١٠٠

جدول (٣-٥) الجدول المتجمع الهابط

فئات المتجع الهابط	التكرار المتجمع الهابط
١٠ فأكثر	١٠٠
٢٠ فأكثر	٨٥
٣٠ فأكثر	٦٥
٤٠ فأكثر	٣٠
٥٠ فأكثر	٥
٦٠ فأكثر	صفر

(٢) ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$

(٣) ايجاد الوسيط من التكرار المتجمع الصاعد :

	فئات المتجمع الصاعد		تكرار متجمع صاعد
الفئة	أقل من ٣٠		٣٥ تكرار متجمع سابق
الوسيطية	؟ قيمة الوسيط	←	٥٠ ترتيب الوسيط
	أقل من ٤٠		٧٠ تكرار متجمع لاحق

الوسيط = بداية الفئة الوسيطية + ($\frac{\text{ترتيب الوسيط - التكرار المتجمع السابق}}{\text{التكرار المتجمع اللاحق - التكرار المتجمع السابق}}$

× طول الفئة الوسيطية)

$$\text{الوسيط} = ٣٠ + \frac{٥٠ - ٣٥}{٧٠ - ٣٥} \times ١٠$$

$$= ٣٠ + \frac{١٥}{٣٥} \times ١٠ = ٣٤,٣$$

أو إيجاد الوسيط من التكرار المتجمع الهابط :

	فئات المتجمع الهابط		تكرار متجمع هابط
الفئة الوسيطية	٣٠ فأكثر		٦٥
	؟ قيمة الوسيط	$\longleftarrow$	٥٠ ترتيب الوسيط
	٤٠ فأكثر		٣٠

$$\text{الوسيط} = ٣٠ + \frac{٦٥ - ٥٠}{٦٥ - ٣٠} \times ١٠$$

$$= ٣٠ + \frac{١٥}{٣٥} \times ١٠ = ٣٤,٣$$

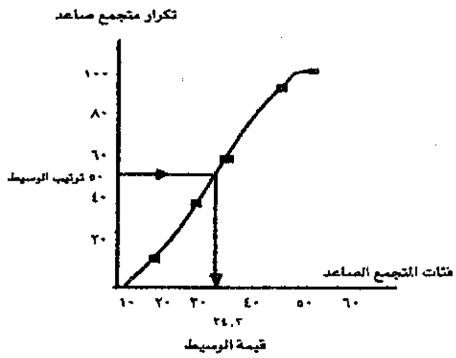
مثال:

فى المثال السابق المطلوب حساب الوسيط من الرسم

الحل:

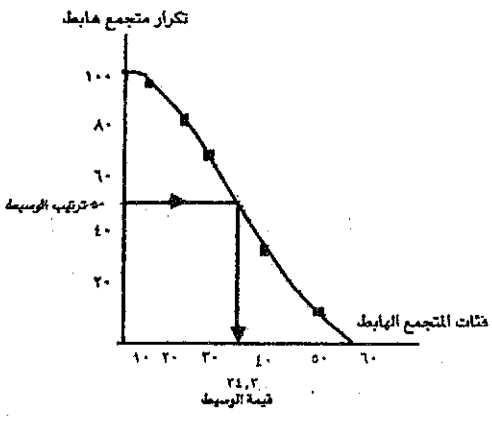
$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

أولاً : باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد



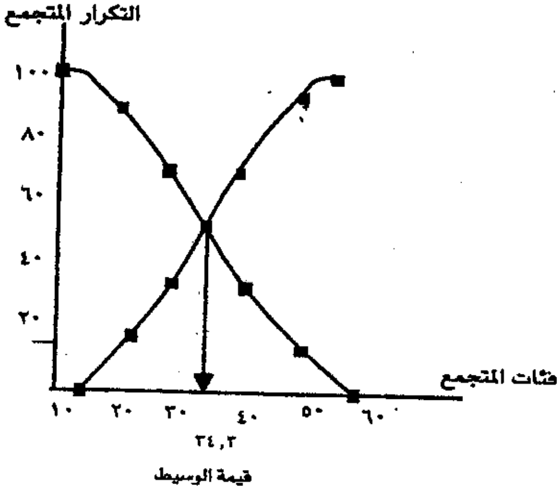
شكل (٣-١) : المنحنى المتجمع الصاعد

ثانياً : باستخدام المنحنى المتجمع الهابط



شكل (٣-٢) : المنحنى المتجمع الهابط

ثالثاً : باستخدام المنحنيين الصاعد والهابط



شكل (٣-٣) : المنحنى المتجمع الصاعد والهابط معاً

قيمة الوسيط = ٣٤,٣

نلاحظ أن المنحنى المتجمع الصاعد يتقاطع مع المنحنى الهابط فى نقطة الوسيط ترتيباً وقيمة.

مميزات الوسيط :

١- لا يتأثر بالقيم المتطرفة أو الشاذة للبيانات.

٢- يمكن حساب الوسيط فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة للبيانات الكمية.

٣- يمكن إيجاده فى حالة البيانات الوصفية التى يمكن ترتيبها.

٤- مجموع الانحرافات المطلقة عن الوسيط أقل ما يمكن، مقارنة بأى نقطة أخرى.

عيوب الوسيط :

١- لا يأخذ جميع القيم فى الاعتبار عند حسابه.

٢- لا يسهل التعامل معه فى التحاليل الإحصائية والرياضية.

ويمكن الإشارة إلى أن الوسيط أكبر من الوسط الحسابى فى حالة البيانات الملتوية جهة اليسار وأقل من الوسط الحسابى فى حالة البيانات الملتوية جهة اليمين ويساوى الوسط فى حالة البيانات المتماثلة.

ثالثا: المنوال (Mode)

هو القيمة الأكثر تكراراً فى مجموعة البيانات. وقد يكون لمجموعة البيانات منوال واحد ولذلك تسمى وحيدة المنوال أو يكون لها أكثر من منوال وتسمى متعددة المنوال. وقد لا يكون لمجموعة البيانات منوال بذلك تسمى عديمة المنوال.

المنوال فى تعريفه يختلف عن كل من الوسط الحسابى والوسيط. حيث أنه تبين لنا أن الوسط الحسابى فى تعريفه عبارة عن مجموع القيم على عددها.

أما الوسيط فيعرف على أنه القيمة التى يقل عنها عدد من القيم يساوى عدد القيم الذى يزيد عنها. أما المنوال فهو عبارة عن القيمة الأكثر شيوعاً أو الأكثر تكراراً، أى التى تكررت بعدد من المرات يزيد عن غيرها.

البيانات غير مبوبة: Ungrouped data

هو القيمة الأكثر شيوعاً أو الأكثر تكراراً.

مثال:

احسب المنوال لأعمار عينة من الطلاب فى المرحلة الابتدائية وكانت كالتالى:

٥، ٦، ٧، ٦، ٥، ٦، ٨، ٩، ٨، ٦

نلاحظ فى عينة القراءات السابقة أن القيمة ٦ تتكرر ٤ مرات، وأكثر من غيرها من القيم، وبذلك يكون المنوال كالتالى:

المنوال = ٦ سنوات

مثال :

أوجد المنوال لأعمار عينة من الطلاب فى المرحلة الابتدائية

وكانت : ٧ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ ، ٨

نلاحظ فى عينة القراءات السابقة أن القيمتين ٦ ، ٧ متساويتا التكرار حيث يتكرر كل منها ثلاث مرات، وأكثر من غيرهما، وعليه فإنه يوجد لهذه العينة من الأعمار منوالان هما ٦ ، ٧ سنوات.

مثال:

أوجد المنوال لعينة من الطلاب أعمارهم بالسنوات هى :

٥ ، ٦ ، ٩ ، ١٠ ، ١٤ ، ١١ ، ١٢

لا يوجد فى هذه البيانات قراءة مكررة أكثر من غيرها، ولذلك فإنه لا يوجد لها منوال، أى أن العينة عديمة المنوال.

المنوال لبيانات مبوبة (*الجداول التكرارية*) Grouped data

فى هذه الحالة يمكن إيجاد المنوال حسابياً أو بيانياً، وسوف نتناول شرح كل طريقة على حدة.

١- المنوال حسابياً:

توجد عدة طرق لحساب المنوال، وأبسطها أن يكون المنوال مركز الفئة المنوالية، وهى طريقة تقريبية. وتكون هذه الطريقة دقيقة إذا كان التكرار السابق للتكرار المنوالى مساوياً للتكرار اللاحق للتكرار المنوالى ونعتبر إمكان حدوث ذلك من الناحية العملية قليلاً جداً وتوجد طريقة ثانية وهى طريقة الرافعة. ونذكر طريقة أخرى تعتبر من أفضل الطرق وهى ما تسمى طريقة بيرسون للفروق ويمكن تلخيصها كما يلى : نحدد الفئة المنوالية التى يناظرها أكبر تكرار، ثم نوجد بداية الفئة المنوالية (باستخدام الحدود الحقيقية أو الفعلية للفئات)، ثم نوجد التكرار السابق للتكرار المنوالى، والتكرار اللاحق للتكرار

أما فى حالة الفئات غير المنتظمـة أى غير المتساوية الطول نوجد المنوال من المدرج التكرارى المعدل، ويمكن الاكتفاء بثلاث مستطيلات، وذلك باتباع الخطوات السابقة نفسها فى حالة الفئات المنتظمة.

مثال:

القيمة	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-٧٠
التكرار	١٠	١٥	٢٠	١٨	١٢	٥

هناك طريقتين لحساب المنوال للبيانات المبوبة هما :

١- طريقة الرافعة.

٢- طريقة بيرسون للفروق.

فى هذا المثال نجد أن الفئات متســاوية فيتم بدء الحساب دون تعديل التكرارات أى بنفس التكرارات المعطاة.

١- **طريقة الرافعة:**

تبعاً لهذه الطـريقة يتم تحديد الفئة المنوالية وهى تلك الفـئة التى لها أعلى تكرار. بمعرفة الفئة المنوالية تحدد الفئة التى قبلها والفئة التى بعدها.

∴ فئات حساب المنوال :

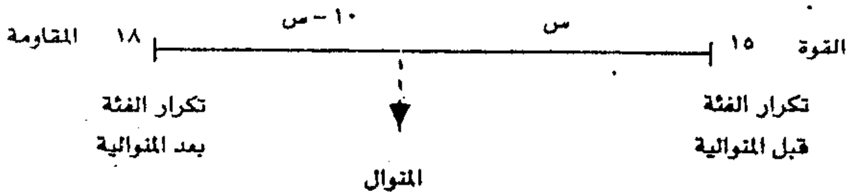
الفئات	التكرار	
٢٠-	١٥	الفئة قبل المنوالية
٣٠-	٢٠	الفئة المنوالية
٤٠-	١٨	الفئة بعد المنوالية

يعتمد الحساب بطريقة الرافعة على استخدام قانون الروافع التالى :

القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

وتقوم فكرة هذه الطريقة على أن المنوال الذى يقع فى الفئة المنوالية[أى أن قيمته (فى المثال السابق) تقع فى الفئة ٣٠-٤٠]

وتكون قيمته أقرب إلى القيمة ٣٠ (بداية الفئة المنوالية) إذا كانت قوة الجذب متمثلة فى تكرار الفئة قبل المنوالية أكبر من قوة المقاومة متمثلة فى تكرار الفئة بعد المنوالية . . وعلى العكس تكون قيمة المنوال أقرب إلى ٤٠ (الحد الأعلى للفئة المنوالية) إذا كانت قوة الجذب المتمثلة فى تكرار الفئة بعد المنوالية أكبر من مقاومة الجذب المتمثلة فى تكرار الفئة قبل المنوالية والرسم التالى يوضح كيفية تحديد قيمة المنوال.



ويحسب المنوال بالقاعدة التالية :

القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

١٥ × س = ١٨ × (١٠ - س)

١٥ س = ١٨٠ - ١٨س

٣٣س = ١٨٠

س = ١٨٠ / ٣٣ = ٥,٤٥٥

∴ المنوال = ٣٠ + س = ٣٠ + ٥,٤٥٥ = ٣٥,٤٥٥

لاحظ أن المقاومة أكبر من القوة وبالتالى اقترب المنوال من الحد الأعلى. أما إذا كانت القوة = المقاومة ، أى أن تكرار الفئة قبل المنوالية = تكرار الفئة بعد المنوالية يكون المنوال مساوياً لمركز الفئة المنوالية.

٢- طريقة الفروق (بيرسون):

من عيوب الطريقة السابقة (طريقة الرافعة) أنها لم تستفد من تكرارات الفئة المنوالية إلا فى استخدامها كمؤشر لتحديد الفئة المنوالية نفسها. لذلك وتفادياً لهذا العيب فقد اقترح بيرسون طريقة الفروق والتى تعتمد أيضاً على تكرارات الفئات الثلاث (قبل المنوالية، المنوالية، بعد المنوالية).

ففى المثال الذى نحن بصدد حله نجد الفئات الثلاثة هم :

الفئات الثلاثة	التكرار	
-٢٠	١٥	$ف_1 = ٢٠ - ١٥ = ٥$
-٣٠	٢٠	
-٤٠	١٨	$ف_2 = ٢٠ - ١٨ = ٢$

حيث $ف_1$ = تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة قبل المنوالية

$ف_2$ = تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة بعد المنوالية

$$\text{ويكون المنوال} = \text{بداية الفئة المنوالية} + \left(\frac{ف_1}{ف_1 + ف_2} \times \text{طول الفئة المنوالية} \right)$$

$$= ٣٠ + \left[\frac{٥}{٥ + ٢} \times ١٠ \right] = ٣٧,١٤$$

مثال:

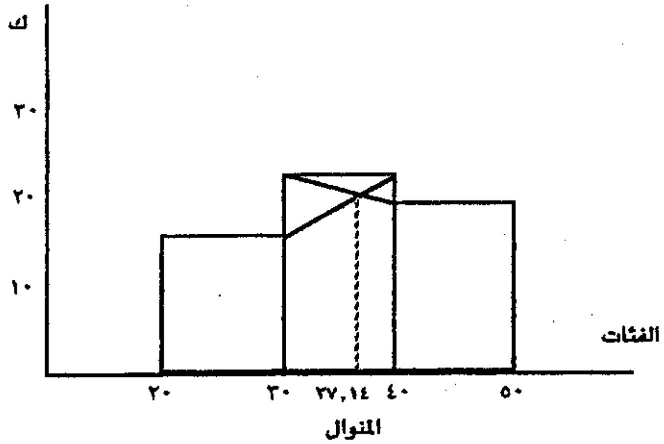
اوجد قيمة المنوال بالرسم من بيانات المثال السابق.

الحل:

∵ الفئات متساوية .

∴ يتم استخدام الفئات وتكراراتها كما هى لرسم المدرج التكرارى.

الفئات الثلاثة	التكرار
٢٠-	١٥
٣٠-	٢٠
٤٠-	١٨



شكل (٣-٥) : المدرج التكرارى

يتم توصيل الخطوط كما فى الرسم من نهاية الفئة قبل المنوالية إلى نهاية الفئة المنوالية ومن بداية الفئة بعد المنوالية إلى بداية الفئة المنوالية نسقط عمود من تقاطع الخطين ليقطع المحور الأفقى داخل الفئة المنوالية عند نقطة المنوال.

من الرسم نجد أن :

قيمة المنوال = ٣٧,١٤ تقريباً

ومما يجب ملاحظته أنه كلما كان مقياس الرسم مناسباً وكان الرسم دقيقاً فسوف تكون القيمة المستخرجة من الرسم أقرب ما تكون إلى القيمة المحسوبة.

مثال:

احسب المنوال من البيانات التالية :

فئات	١٠-	٢٥-	٤٠-	٦٠-	٧٠-٨٠
تكرارات	١٥	٣٣	٤٠	٢٠	١٢

الحل:

بما ان الفئات غير متساوية فلا يمكننا معرفة أى الفئات لها أعلى تكرار إلا إذا تم تعديل التكرارات بما يجعل أطوال الفئات متساوية. وأبسط أسلوب لإجراء هذا التعديل هو أن نجعل أطول الفئات كلها مساوية لوحدة واحدة، ويتم تعديل التكرارات بقسمة تكرار كل فئة على طول هذه الفئة فينتج لدينا التكرار المناظر لكل الفئات وكل فئة من الفئات طولها متساو ويساوى وحدة واحدة.

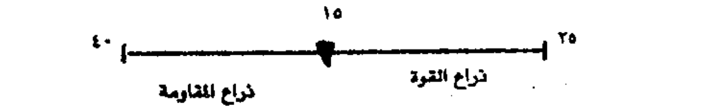
جدول (٣-٦) : الجدول التكرارى المعدل

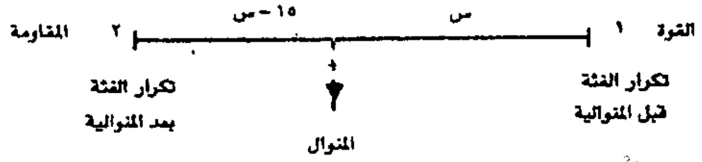
الفئات	التكرار	طول الفئة	التكرار المعدل
١٠-	١٥	١٥	١
٢٥-	٣٣	١٥	٢,٢ ← الفئة المنوالية
٤٠-	٤٠	٢٠	٢
٦٠-	٢٠	١٠	٢
٧٠-٨٠	١٢	١٠	١,٢

لاحظ هنا أن الفئة المنوالية هى (٢٥-٤٠) ،وليست (٤٠-٦٠) كما كان بادياً قبل تعديل التكرارات.

باستخدام طريقة الرافعة :

الفئات الثلاثة	التكرار المعدل	
١٠-	١	الفئة قبل المنوالية
٢٥-	٢,٢	الفئة المنوالية
٤٠-	٢	الفئة بعد المنوالية





القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

١ × س = ٢ × (١٥ - س)

س = ٣٠ - ٢س

٣ س = ٣٠ ⟵ س = ١٠

∴ المنوال = ٢٥ + س = ٢٥ + ١٠ = ٣٥.

باستخدام طريقة بيرسون للفروق:

الفئات الثلاثة	التكرار المعدل	
١٠-	١	
٢٥-	٢,٢	ف١ = ٢,٢ - ١ = ١,٢
٤٠-	٢	ف٢ = ٢,٢ - ٢ = ٠,٢

المنوال = ٢٥ + [(١,٢ ÷ (١,٢ + ٠,٢)) × (٤٠ - ٢٥)]

∴ المنوال = ٢٥ + ١٢,٨٥٧ = ٣٧,٨٥٧

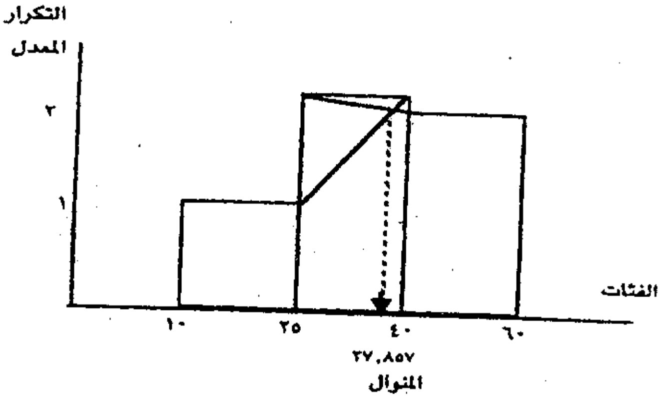
مثال:

أوجد قيمة المنوال بالرسم من بيانات المثال السابق

الحل:

لاحظ أن الفئات غير متساوية لذلك سوف يتم تعديل التكرارات قبل الرسم.

الفئات الثلاثة	التكرارا المعدل
١٠-	١
٢٥-	٢,٢
٤٠-٦٠	٢



شكل (٣-٦) : المدرج التكرارى

من المثالين السابقين نجد أن فكرة الرسم هى نفسها تقريباً فكرة طريقة الفروق حيث يستخدم تكرار كل فئة من الفئات الثلاث لتحديد نقطة التقاطع

مميزات المنوال :

١- مقياس سهل حسابه ولا يتأثر بالقيم المتطرفة.

٢- يمكن إيجاده للبيانات الوصفية والتوزيعات التكرارية المفتوحة للبيانات الكمية.

عيوب المنوال :

١- فى حساب المنوال لا تؤخذ جميع قيم البيانات فى الاعتبار عند حسابه.

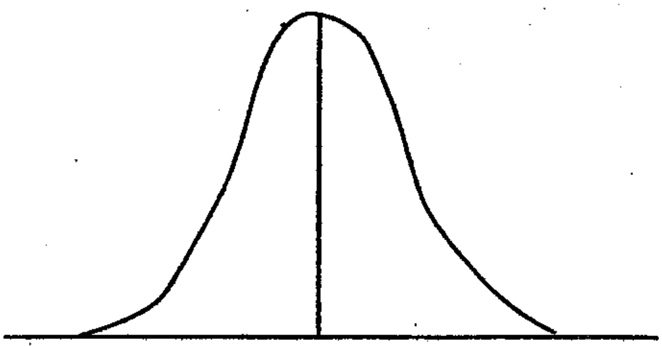
٢- قد يكون لبعض البيانات أكثر من منوال (متعدد القيم) وبذلك لا يمكن تحديد قيمة وحيدة للمنوال وبذلك يصعب التعامل معه فى التحليل الاحصائى.

٣- فى بعض الأحوال قد لا يوجد المنوال.

العلاقة بين الوسط الحسابى والوسيط والمنوال :

(١) فى التوزيعات التكرارية المتماثلة مثال التوزيع الطبيعى فان :

الوسط الحسابى = الوسيط = المنوال



(٢) فى التوزيعات التكرارية القريبة من التماثل فان العلاقة بين المتوسطات الثلاثة يمكن عملياً اعتبارها كما يلى :

الوسط الحسابى - المنوال = ٣ (الوسط الحسابى - الوسيط)

المنوال = الوسط الحسابى - ٣ (الوسط الحسابى - الوسيط)

المنوال = ٣ (الوسيط) - ٢ (الوسط الحسابى)

ومن العلاقة نجد أن :

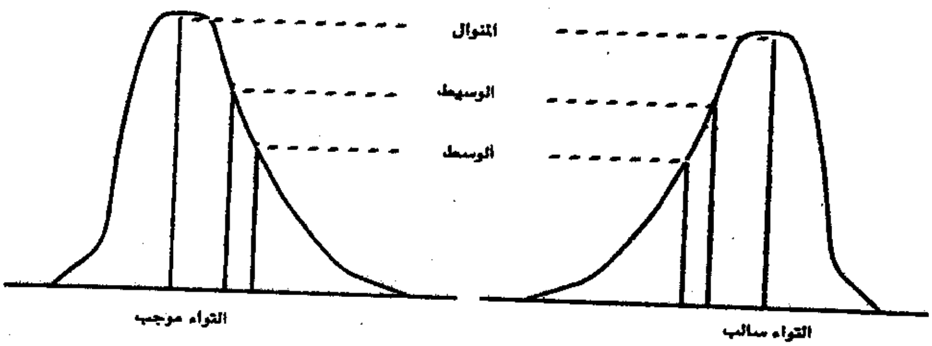
$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{٣}{٢}\ \text{الوسيط} - \frac{١}{٢}\ \text{المنوال} = \frac{٣\ (\text{الوسيط}) - \text{المنوال}}{٢}$$

أو

$$\text{الوسيط} = \frac{١}{٣}\ \text{المنوال} + \frac{٢}{٣}\ \text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{المنوال} + ٢\ (\text{الوسط الحسابى})}{٣}$$

(٣) فى حالة التوزيعات الملتوية يكون الوسيط دائماً واقعاً بين الوسط الحسابى والمنوال

الذى يكون احدهما إلى يمينه مرة وإلى يساره مرة أخرى كما يتضح من الرسم التالى :



حالة الالتواء السالب : الوسط < الوسيط < المنوال

حالة الالتواء الموجب : الوسط > الوسيط > المنوال

مثال :

فى أحد التوزيعات القريبة من التماثل كان الوسيط = ١٧,٨ والمنوال = ١٨

أوجد الوسط الحسابى وبين نوع التواء التوزيع .

الحل

∵ التوزيع قريب من التماثل فيمكن استخدام العلاقة

المنوال = الوسط الحسابى - ٣ (الوسط الحسابى - الوسيط)

= ٣ (الوسيط) - ٢(الوسط الحسابى)

ومنها نجد أن

الوسط الحسابى = $\frac{٣}{٢}$ الوسيط - $\frac{١}{٢}$ المنوال .

$\bar{س} = \frac{٣}{٢} (١٧,٨) - \frac{١}{٢} (١٨)$

$\bar{س} = ١٧,٧$

ونلاحـــظ أن أى قيـمة من قـــيم $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ، $\text{س}_{٣}$ ، . . . ، $\text{س}_{ن}$ يجـــب الا تـــاوى صفـــراً وإلا تكون ســـالبـة حيث إذا ســـاوت أى قيـمة الصـفر فـان الوسط الهندسى لجميع القيم سوف يساوى الصفر كما إن جذر القيم السالبة غيـر معرف ككمية حقيقية.

وفى حالة البيانات المبوبة إذاكانت لدينا التكرارات $\text{ك}_{١}$ ، $\text{ك}_{٢}$ ، . . . . ، $\text{ك}_{ن}$

ولها مراكز فئات : $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ، . . . . ، $\text{س}_{ن}$ على الترتيب

فإن الوسط الهندسى يعطى بالعلاقة التالية :

$$\text{الوسط الهندسى} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_{١}^{\text{ك}_{١}} \times \text{س}_{٢}^{\text{ك}_{٢}} \times \dots\dots\dots \times \text{س}_{ن}^{\text{ك}_{ن}}}$$

حيث إن ن = مجـ ك.

مثال:

أوجـد الوسط الهندسى لأعمـار عينة مكـونة من ٧ طلاب فى المرحلة الابتدائيـة وهى ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ١٠ ، ١٢

الحل

$$\text{الوسط الهندسى} = \sqrt[٧]{٣ \times ٥ \times ٦ \times ٦ \times ٧ \times ١٠ \times ١٢}$$

وعادة تستخدم اللوغاريتمات لتسهيل عملية الحساب ، ولذلك

$$\text{لو (الوسط الهندسى)} = \frac{١}{٧} (\text{لو } ٣ + \text{لو } ٥ + \text{لو } ٦ + \text{لو } ٦ + \text{لو } ٧ + \text{لو } ١٠ + \text{لو } ١٢)$$

وبايجاد اللوغاريتمات

$$\text{لو (الوسط الهندسى)} = \frac{١}{٧} (٠,٤٧٧١ + ٠,٦٩٩٠ + ٠,٧٧٨١٥ + ٠,٧٧٨١٥ + ٠,٨٤٥١ + ١ + ١,٠٧٩٢)$$

∴ لو (الوسط الهندسى) = ٠,٨٠٨١

وبالكشف عن الأعداد المقابلة للوغاريتمات يمكن إيجاد الوسط الهندسى

الوسط الهندسى = ٦,٤٣

عند حساب الوسط الحسابى سَ يكون :

$$سَ = \frac{٣ + ٥ + ٦ + ٦ + ٧ + ١٠ + ١٢}{٧} = ٧$$

أى أن الوسط الهندسى أصغر من الوسط الحسابى.

مثال:

احسب الوسط الهندسى من الجدول التكرارى التالى :

فئات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-٦٠	المجموع
تكرارات	١٠	٢٠	٣٠	١٥	٥	٨٠

الحل:

$$\text{الوسط الهندسى} = \sqrt[\text{مجـ ك}]{س_١^{ك_١} \times س_٢^{ك_٢} \times \ldots\ldots\ldots \times س_ن^{ك_ن}}$$

$$\text{لو(الوسط الهندسى)} = \frac{١}{\text{مجـ ك}} \sum_{ر = ١}^{ن} (ك_ر \text{ لو } س_ر)$$

ولاجراء الحل يتم اعداد الجدول التالى :

جدول (٣-٧)

الفئات	ك	مراكز الفئات س	لو س	ك لو س
١٠-	١٠	١٥	١,١٧٦١	١١,٧٦١
٢٠-	٢٠	٢٥	١,٣٩٧٩	٢٧,٩٥٨
٣٠-	٣٠	٣٥	١,٥٤٤١	٤٦,٣٢٣
٤٠-	١٥	٤٥	١,٦٥٣٢	٢٤,٧٩٨
٥٠-٦٠	٥	٥٥	١,٧٤٠٤	٨,٧٠٢
	٨٠			١١٩,٥٤٢

$$\text{لو (الوسط الهندسى)} = \frac{١١٩,٥٤٢}{٨٠} = ١,٤٩٤٢٧٥$$

$$\therefore \quad \text{الوسط الهندسى} = ٣١,٢٠٨٧$$

خامساً: الوسط التوافقى: Harmonic Mean

الوسط التوافقى لمجموعة من القيم هو مقلوب الوسط الحسابى لمقلوبات هذه القيم.

فإذا كان لدينا مجموعة من القيم عددها ($ن$) هى $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ . . . ، $س_ن$ فإن

$$\text{الوسط التوافقى} = \frac{ن}{\frac{١}{س_١} + \frac{١}{س_٢} + \frac{١}{س_٣} + \dots + \frac{١}{س_ن}} = \frac{ن}{\text{مجـ} \left(\frac{١}{س}\right)}$$

وفى حالة البيانات التكرارية فان الصيغة تكون

$$\text{الوسط التوافقى} = \frac{\text{مجـ ك}}{\text{مجـ} \left(\frac{١}{س} \text{ ك}\right)}$$

ويستخدم الوسط التوافقى فى حالات محدودة. وتنطوى طريقة حساب الوسط التوافقى على عملية ترجيح تختلف تماماً عن تلك التى ينطوى عليها طريقة حساب الوسط الحسابى. هذا السبب هو الذى يجعل الوسط التوافقى مناسباً فى الحالات التى تتطلب اعطاء وزناً كبيراً للعناصر ذات التأثير الأقل وتعطى وزناً صغيراً للعناصر ذات التأثير الأكبر. وذلك ينطبق على الحالات التى يراد فيها حساب متوسط لمعدل تغير الظواهر مع الزمن حيث يكون الزمن هو العامل المتغير وتكون المعدلات هى العامل الثابت. كما يكون استخدام الوسط التوافقى مناسباً فى الحالات التى يراد فيها قياس القوة الشرائية للنقود بمعلومية الأسعار. فمن المعروف اقتصادياً أنه كلما كانت الأسعار

منخفضة كلما زادت القوة الشرائية لوحدات النقود وان القوة الشرائية للنقود تقاس بمقلوبات الأسعار النقدية.

مثال:

تحددت منطقة لسباق السيارات على شكل مربع. رذا كانت سرعة أحد السيارات ١٠٠ كم/ساعة فى مسافة الضلع الأول وكانت سرعتها ٢٠٠ كم/ساعة فى مسافة الضلع الثانى وكانت سرعتها ٣٠٠ كم/ساعة فى مسافة الضلع الثالث وكانت سرعتها ٤٠٠ كم/ساعة فى مسافة الضلع الأخير.

المطلوب : حساب معدل سرعة السيارة لمسافة السباق كلها

الحل:

الوسط إلتوافقى للسرعة

$$= \frac{٤}{\frac{١}{١٠٠} + \frac{١}{٢٠٠} + \frac{١}{٣٠٠} + \frac{١}{٤٠٠}}$$

$$= \frac{٤}{٠,٠١ + ٠,٠٠٥ + ٠,٠٠٣٣٣ + ٠,٠٠٢٥}$$

$$= \frac{٤}{٠,٠٢٠٨٣} = ١٩٢,٠٣ \text{ كم/ساعة}$$

أى أنه إذا كان مطلوباً ايجاد متوسط معدل السرعة مع الزمن فان الوسط التوافقى هو المقياس المناسب والذى يعطى النتيجة الصحيحة والتى تتطابق مع المنطق.

مثال:

احسب الوسط التوافقى للبيانات التكرارية التالية :

الفئة	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-٧٠	المجموع
ك	١٠	١٥	٢٠	١٨	١٠	٧	٨٠

الحل:

نقوم باعداد الجدول التالى

جدول (٣-٨)

الفئات	ك	س	$\frac{١}{س}$	$\frac{١}{س}$ ك
١٠-	١٠	١٥	٠,٠٦٦٧	٠,٦٦٧
٢٠-	١٥	٢٥	٠,٠٤	٠,٦
٣٠-	٢٠	٣٥	٠,٠٢٨٦	٠,٥٧٢
٤٠-	١٨	٤٥	٠,٠٢٢٢	٠,٣٩٩٦
٥٠-	١٠	٥٥	٠,٠١٨٢	٠,١٨٢
٦٠-٧٠	٧	٦٥	٠,٠١٥٤	٠,١٠٧٨
	٨٠			٢,٥٢٨٤

$$\text{الوسط التوافقى} = \frac{\text{مجـ ك}}{\text{مجـ}(\frac{١}{س}\text{ ك})} = \frac{٨٠}{٢,٥٢٨٤} = ٣١,٦٤$$

تمـــارين

(١) فيما يلى درجات عشرة طلبة فى امتحان آخر العام لمادة الاحصاء

الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الدرجات	٤١	٤٣	٥٠	٨٠	٤٦	٦٦	٩٠	٩٢	٨٢	٧٠

احسب الوسط الحسابى للدرجات

(٢) إذا كانت درجات ٥ طلاب فى مادة الاحصاء هى

٦٠ ، ٧٢ ، ٤٠ ، ٨٠ ، ٦٣

احسب الوسط الحسابى لدرجات الطلاب

(٣) أوجد الوسط المرجح لدرجات طالب فى ثلاث مواد إذا كانت الدرجات معطاة بالقيم ٤٠ ، ٧٠ ، ٦٥ وكانت ساعات الدراسة الأسبوعية لهذه المواد بالترتيب هى : ٢ ، ٣ ، ٤.

(٤) من بين ٣ مرشحين لوظيفة معيد لمادة الاحصاء – قررت الكلية أن تختار الذى يحصل على أعلى متوسط درجات فى المواد الرياضية والاحصائية . . وفيمايلى درجات هؤلاء المرشحين الثلاث فى المواد الرياضية والاحصائية بالاضافة إلى أهمية المواد الرياضية والاحصائية بالنسبة لهذه الوظيفة :

المادة	الأهمية	درجات المرشحين (س)		
		أ	ب	جـ
رياضة بحته	٣	٨٠	٧٤	٨٠
رياضة مالية	٤	٧٦	٧٩	٨١
مبادىء الاحصاء	٢	٧٠	٦٤	٦٠
الاحصاء المتقدم	١	٥٩	٧٤	٦٩
	١٠	٢٨٥	٢٩١	٢٩٠

(٥) احسب الوسط الحسابى من الجدول التالى

فئات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-٦٠
تكرارات	١٥	٢٠	٣٥	٢٥	٥

(٦) احسب الوسط الحسابى للأجراليومى لمجموعة من العمال والذى تكون بياناته كما يلى

فئات الأجور	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-٥٥
التكرار (عدد العمال)	٥	٨	١٠	١٣	٨	٦

(٧) احسب متوسط اعمار الطلاب للبيانات التالية :

فئات الأعمار	٥-	٧-	٩-	١١-	١٣-١٥
عدد الطلاب	٢	٥	٨	٤	١

(٨) اوجد الوسيط لدرجات الطلاب الآتية : ٦٠ ، ٧٢ ، ٤٠ ، ٨٠ ، ٦٣

(٩) إذا كان إنتاج مجموعة من العمال فى أحد المصانع بالقطعة يومياً هو :

٢٠ ، ٢٥ ، ٢١ ، ٢٩ ، ٣٥ ، ٢١ ، ٤٠ ، ٣٨

والمطلوب إيجاد الوسيط للإنتاج اليومى.

(١٠) إحسب الوسيط للتوزيع التكرارى التالى :

الفئة	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-٢٥
التكرار	٢	٧	٨	٣

(١١) فى إختبار المهارة الفنية لعدد ٥٠ عاملاً، تبين أن توزيع هؤلاء وفقاً لدرجاتهم فى هذا الاختبار كان على النحو التالى :

الفئة	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-٥٠	المجموع
التكرار	٥	٨	١٨	١٢	٧	٥٠

المطلوب : إيجاد قية الوسيط من الرسم.

(١٢) اوجد منوال البيانات الآتية :

(أ) أبيض ، أحمر ، أبيض ، أخضر ، أسود ، أبيض

(ب) ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ٥ ، ٧ ، ٨

(جـ) ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٥.

(د) ٣٧ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٣٧.

(١٣) أوجد المنوال حسابياً لاعمار الطلاب

فئات الأعمار	٥-	٧-	٩-	١١-	١٣-١٥
التكرار	٢	٥	٨	٤	١

(١٤) فيما يلى توزيع ٣٠٠ يوماً وفق المصروفات اليومية لأحدى المحال التجارية بالجنيهات :

الفئة	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-٤٥	المجموع
التكرار	٥	١٠	٧٠	١٦٠	٣٥	١٥	٥	٣٠٠

والمطلوب : ايجاد منوال المصروفات اليومية لهذا المحل التجارى بالرسم.

(١٥) فى دراسة للأرباح الإجمالية اليومية لعدد ٥٥٧ متجراً تبين أن توزيع هذه المتاجر وفق فئات الربح الإجمالى اليومى بالالف جنيه كما يلى :

الأرباح الاجمالية	١-	٢-	٥-	٩-	١٥-	٢٠-	٣٥-	٤٠-٥٠	المجموع
التكرار	٨	٤٥	٩٢	٢٧٦	٦٦	٣٤	٢٨	٨	٥٥٧

المطلوب : إيجاد منوال الأرباح الإجمالية اليومية بالآف الجنيهات لهذه المتاجر. وذلك باستخدام الرسم والحساب.

(١٦) فيما يلى توزيع ٢٠٠ متجراً وفقاً لفئات أرباحها الشهرية بالالف جنيه

الأرباح الشهرية	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٧٠-	١٠٠-١٥٠	المجموع
عدد المتاجر	١٥	٢٥	٥٠	٨٠	٢٠	٨	٢	٢٠٠

والمطلوب ايجاد :

(١) الوسط الحسابى للأرباح الشهرية لهذه المتاجر.

(٢) وسيط الأرباح الشهرية لها من الرسم.

(٣) منوال الأرباح الشهرية لها من الرسم.

(١٧) أوجد الوسط الهندسى للكميات ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨

(١٨) احسب الوسط الهندسى والوسط الحسابى للبيانات

٣ ، ٥ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ١٠ ، ١٢

(١٩) احسب الوسط الهندسى لعدد السيارات فى الأسرة إذا كان لدينا بيانات عدد السيارات وعدد الأسر التالية :

عدد السيارات(س)	١	٢	٣	٤
عدد الأسر(ك)	١٠٠	٣٥	٢٠	١٥

(٢٠) احسب الوسط التوافقى للبيانات التالية :

٣ ، ٥ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ١٠ ، ١٢

(٢١) تسير سيارة صعوداً فى اتجاه قمة جبل المقطم بسرعة ٢٥ كم/ساعة وبعد الوصول إلى القمة عادت السيارة هبوطاً إلى قاع الجبل بسرعة ٥٠ كم/ساعة. ما هو متوسط معدل سرعة السيارة صعوداً وهبوطاً.

(٢٣) احسب الوسط التوافقى للبيانات التالية :

الدرجات (س)	١٠	١٥	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠
التكرارات (ك)	٧	٨	١٠	٢٠	٢٠	١٠	٥

الباب الرابع

مقاييس التشتت والاختلاف

Measures of Dispersion and Variation

فى دراستنا لمقاييس النزعة المركزية - المتوسطات - رأينا أن القيمة المتوسطة تعطى معلومة تمثل مجموعة القيم المحسوبة لها، بحيث يقال إن هذه المجموعة يمثلها متوسط قيمته سَ مثلاً وأن قيم المجموعة المختلفة تتمركز حوله، بعضها أكبر منه والبعض الآخر أقل منه وقد يساويه البعض أحياناً.

لذلك فان المنطق يقول أن هناك مقياسا اضافيا مع المتوسط يساعد على وصف مجموعة من البيانات بصورة أدق وأكثر تحديداً. هذا المقياس يرتبط بانتشار مفردات أى مجموعة حول بعضها البعض أو بمعنى آخر حول قيمة المتوسط التى تمثل مفردات هذه المجموعة.

هذا النوع من المقاييس يطلق عليه مقاييس التشتت ومقاييس الاختلاف. ففى حين أن مقاييس التشتت تعطي صورة عن مدى انتشار قيم مجموعة من المفردات فيما بينها اعتماداً على القيم المطلقة لهذه المفردات حيث أن لها نفس وحدات القياس فان مقاييس الاختلاف تعطينا صورة عن مدى الاختلاف فيما بين عدد من المجموعات المختلفة. وحيث أن وحدات القياس تختلف من مجموعة لأخرى لذلك فسوف تعتمد هذه المقاييس على الوحدات النسبية دون المطلقة.

I - مقاييس التشتت:

أولاً: المدى *Range*

يُعرّف المدى بأنه الفرق بين أكبر قراءة وأصغر قراءة فى مجموعة قراءات. أى أن (المدى = أكبر قراءة - أصغر قراءة)، وذلك فى حالة البيانات المباشرة (غير المبوبة *Ungrouped data*).

مثال:

أخذت ثلاث مجموعات من طلاب الفرقة الثالثة بكلية التجارة وأجرى امتحان لهم فى مادة الاحصاء وحجم كل مجموعة خمس طلاب وكانت درجاتهم على النحو التالى :

المجموعة الأولى (أ)　　　٧٢ ، ٤٧ ، ١٨ ، ٧٩ ، ٨٤

المجموعة الثانية (ب)　　　٥٠ ، ٦٠ ، ٤٠ ، ٨٠ ، ٧٠

المجموعة الثالثة (جـ)　　　٦٠ ، ٦٢ ، ٥٩ ، ٦١ ، ٥٨.

المدى فى المجموعة الأولى : أ = أكبر قيمة - أصغر قيمة

= ٨٤ - ١٨ = ٦٦ درجة

المدى فى المجموعة الثانية: ب = ٨٠ - ٤٠ = ٤٠ درجة

المدى فى المجموعة الثالثة: جـ = ٦٢ - ٥٨ = ٤ درجة

وهذا يعنى أن التشتت فى المجموعة الأولى أكبر منه فى المجموعتين الآخرتين، وأن أقل المجموعات تشتتاً هى المجموعة الثالثة «جـ».

أما فى حالة البيانات المبوبة *Grouped data* فإن المدى يعرف بأكثر من طريقة نذكر منها فيما يلى طريقتين :

أ- المدى = الفرق بين مركزى الفئة العليا والفئة الدنيا.

ب- المدى = الحد الأعلى للفئة العليا مطروحاً منه الحد الأدنى للفئة الدنيا

مثال:

أوجد المدى للأجر اليومى لعينة مكونة من ٥٠ عاملاً ، وهى مبينة بالجدول التالى :

فئات الأجور	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-٥٥
عدد العمال	٥	٨	١٠	١٣	٨	٦

نلاحظ من الجدول التكرارى السابق أن

مركز الفئة الدنيا = ٢٧,٥ ومركز الفئة العليا = ٥٢,٥ جنيه

الحد الأدنى للفئة الدنيا = ٢٥ والحد الأعلى للفئة العليا = ٥٥ جنيه

المدى باستخدام التعريف الأول = ٥٢,٥ - ٢٧,٥ = ٢٥ جنيه

المدى باستخدام التعريف الثانى = ٥٥ - ٢٥ = ٣٠ جنيه

مزايا المدى:

١- يعطى فكرة سريعة عن طبيعة البيانات الإحصائية

٢- مقياس سهل الحساب ويستخدم عادة فى مراقبة جودة الإنتاج.

عيوب المدى:

١- يعتمد فقد على القراءتين المتطرفتين وأحياناً تكون قيم هاتين القراءتين شاذة لذلك فإن المدى مقياس تقريبى لا يعتمد عليه.

٢- يصعب حسابه فى حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة، أو فى حالة البيانات الوصفية.

ثانيا: الانحراف الربيعى أو نصف المدى الربيعى
Quartile Deviation (Semi interquartile range)

لاحظنا مما سبق أن من أهم خصائص المدى غير المرغوب فيها تأثره بالقيم الشاذة. لذا فمن الواجب إيجاد مقياس أو مقاييس أخرى تستبعد هذه القيم الشاذة من الطرفين، ومن أهم هذه المقاييس نصف المدى الربيعى، ويمكن حسابه بترتيب البيانات تصاعدياً، وتقسيم البيانات إلى أربعة أقسام يستعبد منها ربع القيم الصغرى من ناحية، وكذلك ربع القيم الكبرى من الناحية الأخرى.

بعد ذلك فإننا نسمى القيمة (النقطة) التى تكون دونها ربع القراءات الربيع الأدنى ويرمز لها بالرمز ر١ . أما القيمة (النقطة) التى تحدد ثلاثة أرباع القرءات فتسمى الربيع الأعلى، ويرمز لها بالرمز ر٣ والفرق بينهما هو ما يسمى المدى الربيعى. أما نصف المدى

بين الربيع الثالث والربيع الأول فيسمى نصف المدى الربيعى، ويرمز له بالرمز (ر) أى أن :

$$ر = \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢}$$

ويعتبر نصف المدى الربيعى مقياسا يستبعد القيم المتطرفة من الجانبين الأعلى والأدنى.

ويلاحظ أن القيمة (النقطة) التى تكون دونها نصف القراءات (وتسمى بالربيع الثانى) وهى القراءة التى تقسم البيانات إلى نصفين ويرمز له بالرمز $ر_{٢}$ وسبقت الإشارة إليها فى الباب السابق على أنها الوسيط عند دراسة مقاييس النزعة المركزية.

وسوف نتناول طريقة حساب نصف المدى الربيعى فى حالة البيانات غير المبوبة، والبيانات المبوبة كالتالى :

نصف المدى الربيعى لبيانات غير مبوبة Ungrouped data

لإيجاد نصف المدى الربيعى لمجموعة من البيانات نتبع الخطوات التالية :

١- نرتب البيانات، وليكن عددها «N» ترتيباً تصاعدياً مثلاً.

٢- نوجد رتبة الربيع الادنى (أو الأول) $ر_{١}$ وهى $\frac{N}{٤}$ فى حالة ما إذا كانت N تقبل القسمة على ٤ وبذلك تكون قيمة $ر_{١}$ هى القراءة التى رتبتها $\frac{N}{٤}$ أما إذا كانت «N» لا تقبل القسمة على ٤ فتكون قيمة الربيع الأدنى $ر_{١}$ هى متوسط القراءتين اللتين يقع بينهما العدد الكسرى $\frac{N}{٤}$.

٣- نحسب الربيع الأعلى (أو الثالث) $ر_٣$ وهى القراءة التى رتبتها $\frac{٣ \mathcal{N}}{٤}$ فى حالة كون $\mathcal{N}$ تقبل القسمة على ٤. أما فيما عدا ذلك فقيمة الربيع الأعلى هى متوسط القراءتين اللتين يقع بينهما العدد الكسرى $\frac{٣ \mathcal{N}}{٤}$ أى إذا كانت $\mathcal{N}$ لا تقبل القسمة على ٤.

٤- نحسب نصف المدى الربيعى ر بتطبيق العلاقة $\frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$

مثال:

أوجد نصف المدى الربيعى لأعمار عينة مكونة من ٨ موظفين فى أحد الأقسام الإدارية بجامعة عين شمس حيث كانت البيانات هى:

٤٠ ، ٤٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ٢٧ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٣٥

نرتب البيانات تصاعدياً كالتالى:

٢٠ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٢٧ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠ ، ٤٥

$\mathcal{N}$ = ٨ ، رتبة $ر_١$ = $\frac{٨}{٤}$ = ٢

أى أن الربيع الأدنى هو القراءة الثانية من جهة اليمين وهى:

$ر_١$ = ٢١ سنة

رتبة الربيع الأعلى $\frac{٣ \mathcal{N}}{٤}$ = ٦ أى أن $ر_٣$ هو الحد السادس من جهة اليمين، وقيمته هى:

$ر_٣$ = ٣٥ سنة

أما نصف المدى الربيعى فيكون :

$$ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢} = \frac{٣٥ - ٢١}{٢} = \frac{١٤}{٢} = ٧ \text{ سنوات}$$

مثال:

أوجد نصف المدى الربيعى لأعمار مفردات العينة المكونة من ١٠ موظفين حيث إن البيانات كالتالى :

٢٢ ، ٤١ ، ٤٥ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٢٠ ، ٣٢ ، ٣٩

الحل

نرتب البيانات تصاعدياً فتكون :

٢٠ ، ٢٢ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٥ ، ٣٩ ، ٤١ ، ٤٥

$N = ١٠$ ، ورتبة $ر_١ = \frac{N}{٤} = \frac{١٠}{٤} = ٢,٥$

وبذلك تكون قيمة الربيع الأدنى $ر_١ = \frac{٢٢ + ٢٢}{٢} = ٢٢$ سنة

ورتبة $ر_٣ = \frac{٣N}{٤} = \frac{٣ \times ١٠}{٤} = \frac{٣٠}{٤} = ٧,٥$

أى قيمة الربيع الأعلى هى متوسط الحدين السابع والثامن، أى قيمة الربيع الأعلى $ر_٣$ هى :

$$ر_٣ = \frac{٣٥ + ٣٩}{٢} = \frac{٧٤}{٢} = ٣٧ \text{ سنة}$$

وعليه فإن قيمة نصف المدى الربيعى ر هى :

$$ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢} = \frac{٣٧ - ٢٢}{٢} = ٧,٥ \text{ سنة}$$

نصف المدى الربيعى لبيانات مبوبة : *Grouped data*

نحصل على الربيع الأدنى والربيع الأعلى باستخدام نفس الخطوات التى سبق شرحها ثم تطبيق القانون : نصف المدى الربيعى = $\frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$

حيث أن الربيع الأعلى = الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى +

$$\frac{\text{ترتيب الربيع الأعلى} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق}}{\text{التكرار المتجمع الصاعد اللاحق} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

وان الربيع الأدنى = الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى

$$+ \frac{\text{ترتيب الربيع الأدنى} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق}}{\text{التكرار المتجمع الصاعد اللاحق} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

وعلى الرغم من أن نصف المدى الربيعى أعقد قليلاً فى حسابه من المدى لأنه أقل تأثيراً بالقيم المتطرفة منه إلا أنه يؤخذ عليه أنه لا يستعمل جميع البيانات المتاحه إذ يعتمد على قيمتين فقط شأنه فى ذلك شأن المدى.

مثال :

احسب نصف المدى الربيعى (الانحراف الربيعى) للجدول التكرارى التالى لأعمار ١٠٠ شخص.

فئات العمر (سنوات)	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-٦٠
عدد الأشخاص	١٥	٢٠	٢٩	٢٤	١٢

الحل

نبدأ باعداد الجدول التالى : جدول (٤-١)

الفئات	ك	فئات المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع الصاعد
-١٠	١٥	أقل من ١٠	صفر
-٢٠	٢٠	أقل من ٢٠	١٥
-٣٠	٢٩	أقل من ٣٠	٣٥
-٤٠	٢٤	أقل من ٤٠	٦٤
٥٠-٦٠	١٢	أقل من ٥٠	٨٨
		أقل من ٦٠	١٠٠
	١٠٠		

$$\text{ترتيب } ر_1 = \frac{١٠٠}{٤} = ٢٥$$

$$\text{ترتيب } ر_3 = \frac{١٠٠}{٤} \times ٣ = ٧٥$$

$$\text{قيمة } ر_1 = ٢٠ + \frac{٢٥ - ١٥}{٣٥ - ١٥} \times ١٠ = ٢٠ + ٥ = ٢٥$$

$$\text{قيمة } ر_3 = ٤٠ + \frac{٧٥ - ٦٤}{٨٨ - ٦٤} \times ١٠$$

$$= ٤٠ + \frac{١١}{٢٤} \times ١٠ = ٤٤,٥٨٣$$

$$\text{الانحراف الربيعى} = \frac{ر_3 - ر_1}{٢}$$

$$= \frac{٤٤,٥٨٣ - ٢٥}{٢} = \frac{١٩,٥٨٣}{٢} = ٩,٧٩١٥ \text{ سنة}$$

مزايا نصف المدى الربيعى:

١- لا يتأثر بالقيم الشاذة المتطرفة.

٢- يمكن حسابه فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

عيوب نصف المدى الربيعى:

١- لا يأخذ جميع القيم فى الاعتبار عند حسابه.

٢- لا يسهل التعامل معه فى التحليل الإحصائى.

ثالثا: الانحراف المتوسط Mean deviation

قبل تعريف الانحراف المتوسط، وتوضيح كيفية حسابه نحتاج إلى استخدام مفهوم القيمة المطلقة لأى رقم هى قيمته العددية بإشارة موجبة فقط أى أن القيمة المطلقة للعدد -٥ هى ٥ وتكتب على الصورة $|-٥| = ٥$ وعموماً القيمة المطلقة للقراءة -س هى س أى $|-س| = س$.

وكذلك المقدار س - ص فإن قيمته المطلقة هى $|س - ص|$ وهكذا.

والآن نستطيع تعريف الانحراف المتوسط فى حالة البيانات غير المبوبة والمبوبة.

الانحراف المتوسط لبيانات غيرمبوبة Ungrouped data

يُعّرف الانحراف المتوسط فى حالة البيانات غير المبوبة بأنه مجموع الانحرافات المطلقة للقراءات عن وسطها الحسابى مقسوماً على عددها. والانحراف المتوسط لمجموعة من البيانات يحدد مدى تباعد (أو تشتت) مختلف القراءات عن متوسطها باستبعاد الإشارة السالبة كل مرة. مع ملاحظة أن مجموع انحرافات (تباعد) جميع القراءات عن متوسطها يساوى صفراً.

ولتكن لدينا القراءات. $س_1$ ، $س_2$ ، ...... ، $س_ن$ ذات متوسط حسابى $\bar{س}$

فإن انحرافات القراءات عن وسطها الحسابى $\bar{س}$ هى :

$$(س_1 - \bar{س}) ، (س_2 - \bar{س}) ، .... ، (س_ن - \bar{س})$$

وتكون الانحرافات المطلقة هى القيم المطلقة لانحرافات القراءات أى أن :

$$|س_1 - \bar{س}| ، |س_2 - \bar{س}| ، .... ، |س_ن - \bar{س}|$$

وعلى ذلك يكون الانحراف المتوسط الذى يعرف كذلك على أنه الوسط الحسابى للانحرافات المطلقة، وبالتالى فإن :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{|س_1 - \bar{س}| + |س_2 - \bar{س}| + ... + |س_ن - \bar{س}|}{ن}$$

$$= \frac{\text{مجـ} |س - \bar{س}|}{ن}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{مجـ} |س - \text{الوسيط}|}{ن}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن المنوال} = \frac{\text{مجـ} |س - \text{المنوال}|}{ن}$$

مثال:

من البيانات التالية (٢٠ ، ٢٥ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢)

احسب الانحراف المتوسط

أ- عن الوسط الحسابى ب- عن الوسيط جـ- عن المنوال

جـــدول (٤-٢)

س	$\lvert$ س - سَ $\rvert$ $\lvert$ س - ٢٧ $\rvert$	$\lvert$ س - الوسيط $\rvert$ $\lvert$ س - ٢٦ $\rvert$	$\lvert$ س - المنوال $\rvert$ $\lvert$ س - ٢٥ $\rvert$
٢٠	٧	٦	٥
٢٥	٢	١	صفر
٢٥	٢	١	صفر
٢٦	١	صفر	١
٣٠	٣	٤	٥
٣١	٤	٥	٦
٣٢	٥	٦	٧
١٨٩	٢٤	٢٣	٢٤

$$\text{سَ} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{١٨٩}{٧} = ٢٧$$

الوسيط = القيمة الرابعة في الترتيب = ٢٦

المنوال = القيمة التى تكررت أكثر من غيرها = ٢٥

الانحراف المتوسط

أ - عن الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجـ} \lvert \text{س - سَ} \rvert}{\text{ن}}$

$$= \frac{٢٤}{٧} = ٣,٤٢٩$$

ب- عن الوسيط = $\frac{\text{مجـ} \lvert \text{س - الوسيط} \rvert}{\text{ن}}$

$$= \frac{٢٣}{٧} = ٣,٢٨٦$$

$$\text{جـ - عن المنوال} = \frac{\text{مجـ} \left| \text{س - المنوال} \right|}{\text{ن}}$$

$$= \frac{٢٤}{٧} = ٣,٤٢٩$$

الانحراف المتوسط لبيانات مبوبة : Grouped data

نحصل على الانحراف المتوسط باستخدام القانون

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجـ} \left| \text{س - سَ} \right| \text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{مجـ} \left| \text{س - الوسيط} \right| \text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن المنوال} = \frac{\text{مجـ} \left| \text{س - المنوال} \right| \text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$

ويعتمد الانحراف المتوسط فى حسابه على مراكز الفئات، ونحصل على الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابى بأن نحدد مراكز الفئات، ونحصل على الوسط الحسابى، ونحصل على القيم المطلقة لإنحرافات مراكز الفئات عن وسطها الحسابى، ثم يضرب كل انحراف منها فى التكرار المقابل له ثم نحصل على مجموع انحرافات مراكز الفئات عن وسطها الحسابى مضروباً فى التكرار ثم نقسم على مجموع التكرارات فنحصل على الانحراف المتوسط.

مثال :

من البيانات التالية احسب مقياس الانحراف المتوسط

الفئة	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-٦٠	المجموع
ك	١٥	٢٠	٢٩	٢٤	١٢	١٠٠

الحل

نبدأ باعداد الجدول التالى لحساب كل من الوسط الحسابى والوسيط والمنوال

جـــدول (٤-٣)

الفئة	ك	مركز الفئة س	س ك	فئات المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع الصاعد
-١٠	١٥	١٥	٢٢٥	أقل من ١٠	صفر
-٢٠	٢٠	٢٥	٥٠٠	أقل من ٢٠	١٥
-٣٠	٢٩	٣٥	١٠١٥	أقل من ٣٠	٣٥
-٤٠	٢٤	٤٥	١٠٨٠	أقل من ٤٠	٦٤
٥٠-٦٠	١٢	٥٥	٦٦٠	أقل من ٥٠	٨٨
	١٠٠		٣٤٨٠	أقل من ٦٠	١٠٠

$$\text{الوسط الحسابى } \bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٣٤٨٠}{١٠٠} = ٣٤,٨$$

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

$$\text{قيمة الوسيط} = ٣٠ + \left[\frac{٥٠ - ٣٥}{٦٤ - ٣٥} \times ١٠\right] = ٣٥,١٧$$

$$\text{المنوال بطريقة بيرسون} = ٣٠ + \left[\frac{٩}{٩ + ٥} \times ١٠\right] = ٣٦,٤٣$$

والآن لحساب الانحراف المتوسط يتم اعداد الجدول التالى :

جدول (٤-٥)

س	ك	|س - سَ|	|س - سَ| × ك	|س - الوسيط|	|س - الوسيط| × ك	|س - المنوال|	|س - المنوال| × ك
١٥	١٥	١٩,٨	٢٩٧	٢٠,١٧	٣٠٢,٥٥	٢١,٤٣	٣٢١,٤٥
٢٥	٢٠	٩,٨	١٩٦	١٠,١٧	٢٠٣,٤	١١,٤٣	٢٢٨,٦
٣٥	٢٩	٠,٢	٥,٨	٠,١٧	٤,٩٣	١,٤٣	٤١,٤٧
٤٥	٢٤	١٠,٢	٢٤٤,٨	٩,٨٣	٢٣٥,٩٢	٨,٥٧	٢٠٥,٦٨
٥٥	١٢	٢٠,٢	٢٤٢,٤	١٩,٨٣	٢٣٧,٩٦	١٨,٥٧	٢٢٢,٨٤
	١٠٠		٩٨٦		٩٨٤,٧٦		١٠٢٠,٠٤

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسط} = \frac{\text{مجـ}\,|\text{س} - \text{سَ}|\,\text{ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٩٨٦}{١٠٠} = ٩,٨٦$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{مجـ}\,|\text{س} - \text{الوسيط}|\,\text{ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٩٨٤,٧٦}{١٠٠} = ٩,٨٤٧٦$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن المنوال} = \frac{\text{مجـ}\,|\text{س} - \text{المنوال}|\,\text{ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{١٠٢٠,٠٤}{١٠٠} = ١٠,٢٠٠٤$$

مميزات الانحراف المتوسط:

يأخذ جميع القيم فى الاعتبار.

عيوب الانحراف المتوسط:

١- مقياس صعب الحساب وخاصة عندما يكون المتوسط عدداً كسرياً.

٢- يصعب حسابه فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

رابعاً الانحراف المعيارى: Standard Deviation

يعتبر الانحراف المعيارى من أحسن مقاييس التشتت على الإطلاق لما يتمتع به من خصائص رياضية بالإضافة إلى أنه عالج مشكلة انحرافات القيم عن وسطها الحسابى

بدون إهمال الإشارة مثلما استخدم فى الانحراف المتوسط، حيث اعتمد على تربيع هذه الانحرافات فتصبح هذه المربعات جميعها موجبة.

ويُعّرف الانحراف المعيارى بأنه الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى، وإذا استخدم الانحراف المعيارى من عينة يرمز له بالرمز (ع) أما إذا استخدم الانحراف المعيارى من المجتمع يرمز له بالرمز σ (سجما) ، والانحراف المعيارى هو الجذر التربيعى للتباين، ويرمز للتباين ع^{٢} وللمجتمع $\sigma^{٢}$.

الانحراف المعيارى لبيانات غير مبوبة : Ungrouped data

إذا كانت لدينا القيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، .... ، س$_{ن}$

ووسطها الحسابى سَ فإن مربع انحرافات هذه القيم عن وسطها الحسابى هى :

$$\text{التباين ع}^{٢} = \frac{(\text{س}_{١} - \bar{\text{س}})^{٢} + (\text{س}_{٢} - \bar{\text{س}})^{٢} + \ldots\ldots + (\text{س}_{ن} - \bar{\text{س}})^{٢}}{ن}$$

$$\text{أى أن التباين } variance = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{ن}$$

$$\text{الانحراف المعيارى ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{ن}}$$

$$\text{أو} \quad \sqrt{\frac{١}{ن}\,\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}$$

$$\text{حيث } \bar{\text{س}} \text{ متوسط العينة} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} \text{ ، ن حجم العينة}$$

ومما يذكر أن (ع) بصورته هذه يعتبر تقديراً متحيزاً لمعلمة المجتمع وحتى لا يكون كذلك (أى ليكون تقديرا غير متحيزا) فان صيغته تكون كالآتى :

$$ع_{ن-1} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^2}{ن - 1}}$$

ونلاحظ أننا أضفنـا دليل سفلى (ن - ١) لرمـز الانحراف المعـيارى لنفـرق بين (التقدير غير المتحيز) وبين ع (التقدير المتحيز)

أحياناً يتم وضع (ع) أو ($ع_{ن-1}$) فى صورة أكثر ملائمة للعـمليات الحسابية على النحو التالى :

$$\because \text{مجـ}(س - \bar{س})^2 = \text{مجـ}(س^2 - 2\bar{س}س + \bar{س}^2)$$

$$= \text{مجـ}س^2 - 2\bar{س}\,\text{مجـ}س + ن\,\bar{س}^2$$

$$= \text{مجـ}س^2 - 2\frac{\text{مجـ}س}{ن}\text{مجـ}س + ن\frac{\text{مجـ}س}{ن}\frac{\text{مجـ}س}{ن}$$

$$= \text{مجـ}س^2 - 2\frac{(\text{مجـ}س)^2}{ن} + \frac{(\text{مجـ}س)^2}{ن}$$

$$= \text{مجـ}س^2 - \frac{(\text{مجـ}س)^2}{ن}$$

$$\text{ويكون } ع^2 = \frac{\text{مجـ}س^2}{ن} - \left(\frac{\text{مجـ}س}{ن}\right)^2$$

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ}س^2}{ن} - \bar{س}^2}$$

$$\text{ويكون } ع_{ن-1} = \sqrt{\frac{1}{ن-1}\left(\text{مجـ}س^2 - \frac{(\text{مجـ}س)^2}{ن}\right)}$$

وإذا كان لدينا ع ونود حساب $ع_{ن-1}$ أو العكس فاننا نجد :

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{\frac{1}{\text{ن}}\left(\text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}\right)}$$

$$\therefore \text{ع}^{2} = \frac{1}{\text{ن}}\left(\text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}\right)$$

$$\text{ع}^{2}_{\text{ن}-1} = \frac{1}{\text{ن}-1}\left[\text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}\right]$$

مثال:

احسب الانحراف المعيارى لاعمار مجموعة من الطلاب فى المرحلة الابتدائية وهى

٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥ سنة

الحل

جدول (٤-٦)

س	س - سَ	(س - سَ)٢
٨	١	١
٩	٢	٤
٧	٠	٠
٦	١-	١
٥	٢-	٤
٣٥		١٠

$$\text{حيث } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{35}{5} = 7 \text{ سنوات}$$

$$\text{ع}^{2} = \frac{1}{\text{ن}-1}\ \text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{2} = \frac{1}{5-1}(10) = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

$$\text{ع} = \sqrt{2{,}5} = 1{,}581$$

حل آخر

جدول (٤-٧)

س	س^٢
٨	٦٤
٩	٨١
٧	٤٩
٦	٣٦
٥	٢٥
٣٥	٢٥٥

$$ع^{٢} = \frac{١}{ن - ١}\left[\text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{ن}\right]$$

$$= \frac{١}{٥ - ١}\left[٢٥٥ - \frac{(٣٥)^{٢}}{٥}\right]$$

$$= \frac{١}{٤}\left[٢٥٥ - ٢٤٥\right] = \frac{١٠}{٤} = ٢,٥$$

$$ع = \sqrt{٢,٥} = ١,٥٨١$$

وهى نفس النتيجة السابقة

الانحراف المعيارى لبيانات مبوبة : Grouped data

يعتمد حساب الانحراف المعيارى من البيانات المبوبة على مراكز الفئات، حيث نفترض أن القيم فى كل فئة تأخذ قيماً متساوية هى مركز الفئة. أى أن مركز الفئة تكون قيمة مكرره بقدر عدد التكرارات المناظرة لها، ويمكن الحصول على الانحراف المعيارى من البيانات المبوبة باستخدام القانون الآتى :

$$\sqrt{\frac{1}{\text{مجـ ك}}\left[\text{مجـ}(\text{س}-\bar{\text{س}})^{2}\text{ ك}\right]}$$

ويمكن وضع هذا القانون فى الصيغة الآتية :

$$\sqrt{\frac{1}{\text{مجـ ك}}\left(\text{مجـ س}^{2}\text{ ك}-\frac{(\text{مجـ س ك})^{2}}{\text{مجـ ك}}\right)}$$

مثال:

إذا كان لدينا البيانات الآتية :

فئات الدرجات	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	المجموع
عدد الطلاب	٨	١٢	١٦	١٠	٤	٥٠

المطلوب : إيجاد الانحراف المعيارى.

الحل :

جدول (٤-٨)

فئات الدرجات	عدد الطلاب التكرارات (ك)	مراكز الفئات س	س ك	س^{2} ك
٥٠-	٨	٥٥	٤٤٠	٢٤٢٠٠
٦٠-	١٢	٦٥	٧٨٠	٥٠٧٠٠
٧٠-	١٦	٧٥	١٢٠٠	٩٠٠٠٠
٨٠-	١٠	٨٥	٨٥٠	٧٢٢٥٠
٩٠-١٠٠	٤	٩٥	٣٨٠	٣٦١٠٠
المجموع	٥٠		٣٦٥٠	٢٧٣٢٥٠

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{1}{\text{مجـ ك}}\left(\text{مجـ س}^{2}\text{ ك}-\frac{(\text{مجـ س ك})^{2}}{\text{مجـ ك}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{50}\left(273250 - \frac{(3650)^2}{50}\right)} = \sqrt{\frac{1}{50}\left(273250 - \frac{13322500}{50}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{50}\left(273250 - 266450\right)} = \sqrt{\frac{1}{50}\left(6800\right)} = \sqrt{136}$$

$$= 11{,}66$$

بعض خصائص الانحراف المعيارى

(١) إذا أضفنا أو طرحنا مقداراً ثابتاً ث من جميع القراءات لمجموعة البيانات فإن الانحراف المعيارى للقيم الجديدة هو الانحراف المعيارى للقيم الأصلية نفسه.

(٢) إذا ضربنا جميع القيم فى مقدار ثابت أو قسمناها على مقدار ثابت فان الانحراف المعيارى يتأثر بذلك. أى أن الانحراف المعيارى للقيم الأصلية فى حالة الضرب يساوى الانحراف المعيارى للقيم الجديدة مقسوماً على المقدار الثابت. والانحراف المعيارى للقيم الأصلية يساوى الانحراف المعيارى للقيم الجديدة مضروباً فى المقدار الثابت.

(٣) مجموع مربعات الانحراف للقيم عند وسطها الحسابى سَ تكون أصغر من مجموع مربعات الانحراف للقيم عن أى وسط فرضى آخر أ حيث سَ ≠ أ.

(٤) إذا كانت هناك عينتان مجموع تكرارهما هو ن$_1$ ، ن$_2$ وتباينهما هو ع$_1^2$ ، ع$_2^2$ على الترتيب ولهما المتوسط سَ نفسه فان التباين المشترك هو

$$\text{ع}^2 = \frac{(\text{ن}_1 - 1)\,\text{ع}_1^2 + (\text{ن}_2 - 1)\,\text{ع}_2^2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2 - 2}$$

(٥) الانحراف المعيارى لمجموعة من البيانات أكبرمن الانحراف المتوسط لها.

مميزات الانحراف المعيارى:

١- يأخذ جميع القيم فى الاعتبار، ويعتبر من أدق مقاييس التشتت.

٢- يدخل فى معظم التحاليل الاحصائية لسهولة التعامل معه رياضياً.

عيوب الانحراف المعيارى:

١- يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة).

٢- يصعب حسابه فى البيانات الوصفية، والبيانات الكمية ذات الجداول التكرارية المفتوحة.

II- مقاييس أو معاملات الاختلاف Coefficients of Variation

معامل أو مقياس الاختلاف هو مقياس التشتت النسبى الذى يستخدم لمقارنة تشتت مجموعتين أو أكثر. ففى حين تعتمد مقاييس التشتت السابق دراستها على القيم المطلقة للظاهرة الأمر الذى يجعلها قادرة على دراسة التشتت فيما بين مفردات مجموعة معينة، فان التشتت النسبى ممثلاً فى معامل الاختلاف يتخلص من اختلاف وحدات القياس التى تقاس بها كل ظاهرة بحيث تعطينا رقماً نسبياً يصلح لمقارنة ظاهرتين أو أكثر. فعلى سبيل المثال إذا أردنا دراسة مدى تجانس مجموعتين قيس لأحداهما الطول وللأخرى الوزن فالأولى وحدات قياسها بالسنتيمتر والثانية بالكيلو جرام، فانه يمكن استخلاص نتيجة مؤداها أن تجانس الأولى (أعلى أو أقل أو مساوى) لتجانس الثانية اعتماداً على مقياس التشتت النسبى المتمثل فى معامل الاختلاف.

$$\text{معامل الاختلاف أو مقياس التشتت النسبى} = \frac{\text{مقياس تشتت}}{\text{مقياس متوسط}}$$

وعمـوماً نذكر فيـما يلى الصيغ المختلـفة لمعاملات الاخـتلاف (مقاييس التـشتت النسبية).

(١) $$\text{معامل الاختلاف الربيعى} = \frac{\text{الانحراف الربيعى}}{\text{الوسيط}}$$

$$= \frac{ر_٣ - ر_١}{٢\ (\text{الوسيط})}$$

وقد وجد أن الصيغة التالية تعبر أيضاً عن معامل الاختلاف الربيعى

$$\text{معامل الاختلاف الربيعى} = \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١}$$

حيث يمكن إعتبار أن $ر_٣ + ر_١ = ٢\ ر_٢$

(٢) معامل الاختلاف المتوسط عن :

أ - وسط حسابى $$= \frac{\text{الانحراف المتوسط عن الوسط}}{\text{الوسط الحسابى (س)}}$$

ب - وسيط $$= \frac{\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط}}{\text{الوسيط}}$$

جـ - منوال $$= \frac{\text{الانحراف المتوسط عن المنوال}}{\text{المنوال}}$$

(٣) $$\text{معامل الاختلاف المعيارى} = \frac{\text{الانحراف المعيارى (ع)}}{\text{الوسط الحسابى (س)}}$$

مثال:

أوجد معامل الاختلاف للقيم ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨

الحل:

نسعى إلى معرفة الوسط الحسابى لهذه القيم $\bar{س}$ والانحراف المعيارى لها.

$$\text{الوسط الحسابى} = \bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} = \frac{٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

$$\text{الانحراف المعيارى } ع = \sqrt{\frac{١}{ن - ١}\left[\text{مجـ س}^٢ - \frac{(\text{مجـ س})^٢}{ن}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{١}{٥ - ١}\left[١٩٠ - \frac{(٣٠)^٢}{٥}\right]} = \sqrt{\frac{١}{٥ - ١}(١٩٠ - ١٨٠)}$$

$$= \sqrt{\frac{١}{٤}(١٠)} = \sqrt{٢,٥} = ١,٥٨١$$

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{ع}{\bar{س}} = \frac{١,٥٨١}{٦} = ٠,٢٦٣٥$$

هذا المعامل ليس له تمييز وبذلك يصلح للمقارنة بين مجموعات ذات وحدات قياس مختلفة. هذا ويمكن أن نعبر عن معامل الاختلاف بنسبة مئوية.

$$\text{ففي المثال السابق يصبح معامل الاختلاف} = \frac{١,٥٨١}{٦} \times ١٠٠ = ٢٦,٣٥\%$$

القيم المعيارية:

من الأدوات الاحصائية التى تستخدم فى تحليل بيانات الظواهر التى تهتم بها الإدارة فى المشروعات التجارية والصناعية القيم المعيارية حيث يتحدد بمقتضاها مركز المفردة من التوزيع الذى تتبعه.

ولتوضيح ذلك نفرض أن الدراسة منصرفة إلى المقارنة بين نشاط أحد وكلاء بيع الثلاجات بمدينة القاهرة، ووكيل آخر لنفس الشركة بمدينة بنها، وذلك على أساس عدد الثلاجات التى أمكن كل منها تسويقها خلال شهر أكتوبر سنة ١٩٩٧.

ويفرض أن عدد الثلاجات التي باعها وكيل القاهرة خلال هذا الشهر هو ٢٥ ثلاجة، وعدد الثلاجات التى باعها وكيل بنها فى نفس الشهر هو ١٥ ثلاجة.

فإذا تمت المقارنة على أساس القيم المطلقة لعدد الثلاجات المباعة بمعرفة كل من الوكيلين فاننا نجد أن مستوي وكيل القاهرة مرتفع عن مستوى وكيل بنها، وهذه المقارنة ليست سليمة لأنه لابد وأن يؤخذ فى الاعتبار عند اجراء مثل هذه المقارنة موضع كل وكيل بالنسبة للتوزيع الذى يتبعه ويتحدد ذلك على أساس القيمة المعيارية والتى تتحدد كما يلى :

$$\text{القيمة المعيارية} = \frac{\text{قيمة المتغير} - \text{الوسط الحسابى}}{\text{الانحراف المعيارى}}$$

مثال :

حصل طالب على ٨٢ درجة فى مقرر للإحصاء حيث كان متوسط الدرجات هو ٧٥ درجة وانحراف معيارى ١٠ درجات ثم حصل على ٨٩ درجة فى مقرر للمحاسبة وكان متوسط الدرجات للمحاسبة هو ٨١ درجة وانحراف معيارى ١٦ درجة.

فى أى المقررين كانت درجة استيعاب هذا الطالب أعلى ؟

الحل

إذا كانت $ز_١$ ترمز للدرجة المعيارية للإحصاء فإن :

$$ز_١ = \frac{٨٢ - ٧٥}{١٠} = ٠,٧$$

وإذاكانت $ز_٢$ ترمز للدرجة المعيارية للمحاسبة فإن :

$$ز_٢ = \frac{٨٩ - ٨١}{١٦} = ٠,٥$$

وهذا يعطى أن استيعاب الطالب النسبى لمقرر الإحصاء أعلى من المحاسبة.

العزوم : Moments

تستخدم العـزوم - احصائياً - فى قياس خصائـص التوزيعات التكرارية من حيث النزعة المركزية، التشـتت والتماثل وطبيعة التدبب والتفرطـح. ولهذا الغرض تحسـب قيم العزوم حـول نقطة معينة قـد تكون الوسط الحسابى أو نقطة المركـز (صفر) أو أى قيـمة ثابتة أخـرى ولتكن أ وهذه العزوم تبدأ من العـزم الأول إلى أى رتبة ($ر$) مثلاً. وقـيمة العزم تعرف بأنها متوسط انحرافات قيم التوزيع عن هذه النقطة والتى تتحدد رتبته بدرجة الأس التى يرفع إليها هذه الانحرافات.

وعموماً فإن العزم النونى حول نقطة ما هو :

$$\text{العزم النونى} = \frac{١}{ن} \text{مجـ} (\text{س} - \text{النقطة})^{ر}$$

وبالنسبة لما تتطلبه قياسات الالتواء والتـفرطح فسيكون كافياً الحصول على العزوم من الأول وحتى الرابع فقط وفيما يلى الصيغ المختلفة لهذه العزوم.

(١) العزوم حول الوسط الحسابى (العزوم المركزية):

سنرمز للعزوم حول الوسط الحسابى بالرمز (مـ) ويكون :

أ- بيانات غير مبوبة :

$$\text{العزم الأول } م_١ = \frac{١}{ن} \text{مجـ} (\text{س} - \bar{\text{س}})$$

العزم الثانى $م_{٢} = \frac{١}{ن} \text{ مجـ } (س - \bar{س})^{٢}$

العزم الثالث $م_{٣} = \frac{١}{ن} \text{ مجـ } (س - \bar{س})^{٣}$

العزم الرابع $م_{٤} = \frac{١}{ن} \text{ مجـ } (س - \bar{س})^{٤}$

ب- بيانات مبوبة :

العزم الأول $م_{١} = \frac{١}{\text{مجـ ك}} \text{ مجـ ك } (س - \bar{س})$

العزم الثانى $م_{٢} = \frac{١}{\text{مجـ ك}} \text{ مجـ ك } (س - \bar{س})^{٢}$

العزم الثالث $م_{٣} = \frac{١}{\text{مجـ ك}} \text{ مجـ ك } (س - \bar{س})^{٣}$

العزم الرابع $م_{٤} = \frac{١}{\text{مجـ ك}} \text{ مجـ ك } (س - \bar{س})^{٤}$

ونلاحظ من الصيغ السابقة :

* **$م_{١}$ (العزم الأول) هى متوسط مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى والذى نعرف أنه = صفر (من خواص الوسط الحسابى).**
* **$م_{٢}$ (العزم الثانى) هى مقياس التباين والذى سبق لنا دراسته كمقياس هام من مقاييس التشتت.** لاحظ أن التباين = مربع الانحراف المعيارى = $\sigma^{٢}$ أو $ع^{٢}$.

(٢) العزوم حول الصفر (العزوم الصفرية):

وسنرمز لها بالرمز (م).

أ- بيانات غير مبوبة

$$م_1 = \frac{1}{N} مجـ س = الوسط الحسابى$$

$$م_2 = \frac{1}{N} مجـ س^2$$

$$م_3 = \frac{1}{N} مجـ س^3$$

$$م_4 = \frac{1}{N} مجـ س^4$$

ب – بيانات مبوبة :

$$م_1 = \frac{1}{مجـ ك} مجـ س ك = الوسط الحسابى$$

$$م_2 = \frac{1}{مجـ ك} مجـ س^2 ك$$

$$م_3 = \frac{1}{مجـ ك} مجـ س^3 ك$$

$$م_4 = \frac{1}{مجـ ك} مجـ س^4 ك$$

العلاقة بين العزوم حول الوسط الحسابى $\bar{م}_ر$ والعزوم حول الصفر ($م_ر$):

$$\bar{م}_1 = صفر$$

$$\bar{م}_2 = م_2 - م_1^2$$

$$\bar{م}_3 = م_3 - 3م_2م_1 + 2م_1^3$$

$$\bar{م}_4 = م_4 - 4م_3م_1 + 6م_2م_1^2 - 3م_1^4$$

حساب العزوم وقياس الالتواء Skewness

ذكرنا عند دراسة الالتواء أنه للتوزيعات المتماثلة يكون قيمة معامل الالتواء = صفر أما في التوزيعات غير المتماثلة فقد يكون الالتواء موجباً أو سالباً. لذلك يجب أن يكون لصيغة قياس الالتواء بالعزوم خاصية أن تساوى صفر إذا كان التوزيع متماثل (مثل التوزيع الطبيعي) (المعتدل) وأن يساوى قيمة سالبة (ملتوى جهة اليسار) أو قيمة موجبة (ملتوى جهة اليمين). والصيغ المقترحة لحساب معامل الالتواء بالعزوم هي :

$$\text{معامل الالتواء} = \sqrt{\frac{\text{م}_{٣}^{٢}}{\text{م}_{٢}^{٣}}} = \frac{\text{م}_{٣}}{\sqrt{\text{م}_{٢}^{٣}}}$$

حيث أن $\text{م}_{٢} = \sigma^{٢}$ أو $\text{ع}^{٢}$

$$\text{فان معامل الالتواء} = \frac{\text{م}_{٣}}{\sigma^{٣}} = \frac{\text{م}_{٣}}{\text{ع}^{٣}} \quad \text{في حالة عدم معرفة } \sigma$$

التفرطح Kurtosis

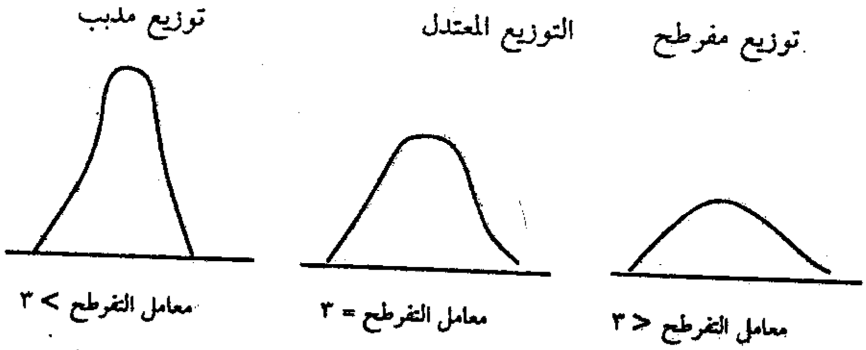
دعنا الآن نذكر بعض المعلومات عن التفرطح كأحد خصائص التوزيعات التكرارية. يشير التفرطح إلى مدى تدبب أو تفرطح قمة التوزيعات التكرارية. وتدبب أو تفرطح التوزيعات – مثل أي خاصية – يجب أن يقاس ويقارن بالنسبة لتوزيع يقال عنه أنه غير مدبب أو غير مفرطح [لاحظ أنه في كل أمور حياتنا نستخدم ذلك الأسلوب حيث نقول ذلك الشخص ذكي أو غير ذكي – طويل أو قصير . . فعند الحكم على ذكاء أو طول أي شخص يكون في أذهاننا ذلك المستوى من الذكاء أو الطول للشخص العادي (ذكاء متوسط) أو (طول متوسط)]. بالنسبة للتوزيعات يؤخذ التوزيع الطبيعي (المعتدل) كمقياس متوسط للتدبب أو التفرطح ويتم مقارنة أي توزيع لدينا بذلك التوزيع المعتدل.

فإذا كانت قمة التـوزيع محل الدراسة أكثر تدببا عن قمة التـوزيع المعتدل يقال أنه مدببا والعكس إذا كـانت قمته أكثـرتفرطحا عن قمـة التوزيع المعتدل يقال أنه مـفرطحا. لذلك أحيانا ما يطلق على معامل التفرطح اسم (مـعامل الاعتدال). عند حساب مقياس التفرطح المقترح للتوزيع المعتدل وجد أنه = ٣.

وعلى ذلك فإذا حسب هذا المقياس لأى توزيع ووجد أنه أقل من ٣ يقال أن هذا التوزيع مفرطح وإذا وجد أنه أكبر من ٣ يقال أنه مدبباً. ومقياس التفرطح المقترح هو.

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{م_{٤}}{م_{٢}^{٢}}$$

وفى بعض الأحـيان يطلق على هذا المقـياس (معـامل التدبب). والشكـل التالى يوضح شكل تدبب أو تفرطح التوزيع مقارنا بالتوزيع المعتدل.



ومما يجب ذكره أن التـوزيع قد يكون متـماثلاً (الالتواء = صفـر) أو غير متـماثلاً (الالتواء ≠ صفر) ومع ذلك قد يكون مدبياً أو مفرطحاً.

مثال:

احسب باستخدام العزوم معاملى الالتواء والتفرطح للبيانات التالية

١٠ ، ١٤ ، ١٨ ، ٢٥ ، ٢٢ ، ٢٠ ، ٢٧

الحل:

س	$س^{٢}$	$س^{٣}$	$س^{٤}$
١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠
١٤	١٩٦	٢٧٤٤	٣٨٤١٦
١٨	٣٢٤	٥٨٣٢	١٠٤٩٧٦
٢٥	٦٢٥	١٥٦٢٥	٣٩٠٦٢٥
٢٢	٤٨٤	١٠٦٤٨	٢٣٤٢٥٦
٢٠	٤٠٠	٨٠٠٠	١٦٠٠٠٠
٢٧	٧٢٩	١٩٦٨٣	٥٣١٤٤١
١٣٦	٢٨٥٨	٦٣٥٣٢	١٤٦٩٧١٤

(١) معامل الالتواء $= \sqrt{\dfrac{مـ_{٣}^{٢}}{مـ_{٢}^{٣}}} = \dfrac{مـ_{٣}}{\sqrt{مـ_{٢}^{٣}}}$

$مـ_{٢} = م_{٢} - م_{١}^{٢}$

$مـ_{٣} = م_{٣} - ٣م_{٢}م_{١} + ٢م_{١}^{٣}$

نحسب أولاً $م_{١}$ ، $م_{٢}$ ، $م_{٣}$

$م_{١} = \dfrac{مجـ\ س}{ن} = \dfrac{١٣٦}{٧}$

$م_{٢} = \dfrac{مجـ\ س^{٢}}{ن} = \dfrac{٢٨٥٨}{٧}$

$م_{٣} = \dfrac{مجـ\ س^{٣}}{ن} = \dfrac{٦٣٥٣٢}{٧}$

$مـ_{٢} = \dfrac{٢٨٥٨}{٧} - \left(\dfrac{١٣٦}{٧}\right)^{٢} = ٣٠,٨١٦٣$

ويكون = $\sqrt{\text{مـ}_{٢}}$ = ٥,٥٥١٢

$$\text{مـ}_{٣} = \frac{٦٣٥٣٢}{٧} - ٣\left(\frac{٢٨٥٨}{٧}\right)\left(\frac{١٣٦}{٧}\right) + ٢\left(\frac{١٣٦}{٧}\right)^{٣} = - ٥٣,٨٤٢٦$$

$$\text{ويكون معامل الالتواء} = \frac{- ٥٣,٨٤٢٦}{(٥,٥٥١٢)^{٣}} = - ٠,٣١٥$$

هذه النتيجـة تعنى أن هناك التواء سالب، أى أن توزيع البيـانات محل البحث ذى التواء سالب.

(٢) معامل التفرطح = $\dfrac{\text{مـ}_{٤}}{\text{مـ}_{٢}^{٢}}$

نحسب أولاً $\text{م}_{٤}$ ، ولدينا $\text{م}_{١}$ ، $\text{م}_{٢}$ ، $\text{م}_{٣}$ من الخطوة السابقة

$$\text{م}_{٤} = \frac{\text{مجـ س}^{٤}}{\text{ﻥ}} = \frac{١٤٦٩٧١٤}{٧}$$

، $\text{مـ}_{٤} = \text{م}_{٤} - ٤\text{م}_{٣}\text{م}_{١} + ٦\ \text{م}_{٢}\ \text{م}_{١}^{٢} - ٣\text{م}_{١}^{٤}$

$$= \frac{١٤٦٩٧١٤}{٧} - ٤\left(\frac{٦٣٥٣٢}{٧}\right)\left(\frac{١٣٦}{٧}\right) + ٦\left(\frac{٢٨٥٨}{٧}\right)\left(\frac{١٣٦}{٧}\right)^{٢}$$

$$- ٣\left(\frac{١٣٦}{٧}\right)^{٤} = ١٨٦٦,٩٩٤٣$$

$$\therefore\ \text{معامل التفرطح} = \frac{\text{مـ}_{٤}}{\text{مـ}_{٢}^{٢}} = \frac{١٨٦٦,٩٩٤٣}{(٣٠,٨١٦٣)^{٢}} = ١,٩٧$$

وحيث أن معامل التفرطح = ١,٩٧ < ٣

∴ توزيع البيانات له خاصية التفرطح أى مفرطحا.

تمـــارين

(١) أوجد المدى للأجور اليـومية بالجنية لعـينة من العمال مكونة من عشـرة عمال فى إحدى المؤسسات وكانت :

٦٥ ، ٥٥ ، ٧٧ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩٩ ، ٨٠ ، ٦٠ ، ٨٨ ، ٧٠

(٢) احسب المدى لدرجات الطلاب الآتية :

٨٢ ، ٤٠ ، ٦٢ ، ٧٠ ، ٣٠ ، ٨٠

(٣) اوجد المدى لدرجات مجموعة من الطلاب معطاة بالجدول الآتى :

فئات	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠
تكرارات	٢	٩	١٥	١١	٢	١

(٤) اوجد نصف المدى الربيعى لاوزان مجموعة الطلاب التالية :

٦٧ ، ٦٥ ، ٦٩ ، ٥٨ ، ٥٥ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٠

(٥) المطلوب إيجاد نصف المدى الربيعي درجات مجموعة من الطلاب :

٦٤ ، ٥٢ ، ٥٦ ، ٦١ ، ٦٦ ، ٧٢ ، ٧٠ ، ٥٤ ، ٧٤

(٦) احسب الانحراف الربيعى من البيانات التالية :

الدخل الشهرى	٢٥٠-	٣٠٠-	٣٥٠-	٤٠٠-	٤٥٠-	٦٧٠-	المجموع
عدد العاملين	٢٠	١٥	١٠	٣٠	١٠	٧	٩٢

(٧) أوجد الانحراف المتوسط لدرجات خمسة طلاب فى مادة الاحصاء

٥٢ ، ٥٤ ، ٦٦ ، ٧٢ ، ٧٦

(٨) فيما يلى الاجر فى الساعة لعدد ١٠ عمال بالجنيهات

٧ ، ١١ ، ٥ ، ١٤ ، ١٩ ، ١٠ ، ٣ ، ١٦ ، ١٢ ، ١٣

والمطلوب حساب متوسط الانحرافات المطلقة لهذه الأجور

(٩) أوجد الانحراف المتوسط لدرجات ٥٠ طالب فى امتحان مادة الاحصاء

الدرجة	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	المجموع
عدد الطلاب	٨	١٢	١٦	١٠	٤	٥٠

(١٠) احسب الانحراف المعيارى للبيانات التالية :

٢٠ ، ٢٥ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢

(١١) احسب الانحراف المعيارى للمبيعات اليومية لاحد المحال التجارية خلال سبعة أيام وبيانها بالألف الجنيهات كما يلى :

١٥ ، ١٢ ، ٩ ، ٥ ، ١٤ ، ١٠ ، ٧

(١٢) من الجدول التكرارى التالى :

فئات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-٦٠
تكرارات	١٥	٢٠	٢٨	٢٤	١٣

احسب الانحراف المعيارى

(١٣) فيما يلى توزيع عدد ٢٠٠ محلاً تجارياً بحسب قيمة المبيعات الأسبوعية بالألف الجنيهات :

المبيعات الأسبوعية	٥-	١٠-	١٥-	١٨-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٤٠-٥٠	المجموع
تكرارات	٢٠	٢٥	٣٦	٤٤	٣٠	٢٥	١٥	٥	٢٠٠

والمطلوب :

١- حساب الوسط الحسابى للمبيعات الاسبوعية لهذه المحال التجارية.

٢- حساب الانحراف المعيارى للمبيعات الأسبوعية لهذه المجال التجارية ثم احسب التباين.

٣- حساب معامل الاختلاف للمبيعات الأسبوعية لهذه المحال التجارية.

(١٤) احسب العزم الأول والعزم الثانى حول نقطة الأصل وكذلك كلا من العزم الأول المركزى والعزم الثانى المركزى لمجموعة البيانات :

٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ١٠

(١٥) من التوزيع التكرارى التالى المطلوب حساب التواء وتفرطح هذا التوزيع :

فئات	صفر-	١٠-	٢٠-	٣٠-٤٠	المجموع
ك	١	٣	٤	٢	١٠

أمثلة متنوعة على مقاييس النزعة المركزية والتشتت

مثال ١ :

إذا كان لديك البيانات التالية التى تمثل المصروف اليومى لعدة طلاب بالجنيه

١٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٥ ، ٢٥

اوجد مقياس مناسب (متوسط مناسب) للنزعة المركزية.

الحــــل

الوسط الحسابى $\overline{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}$

$$\overline{س} = \frac{١٥ + ١٠ + ٢٠ + ٥ + ٢٥}{٥} = \frac{٧٥}{٥} = ١٥$$

مثال ٢ :

الآتى يمثل الدخل السنوى لـ (١٠٠) أسرة فى محافظة معينة بالآف الجنيهات

فئات الدخل	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-
عدد الأسر	٧	١٦	١٨	٢٢	٢٠	١٧

والمطلوب : إيجاد متوسط مناسب للدخل السنوى للأسر.

الحــــل

ف	ك	س	س ك
٥-	٧	١٠	٧٠
١٥-	١٦	٢٠	٣٢٠
٢٥-	١٨	٣٠	٥٤٠
٣٥-	٢٢	٤٠	٨٨٠
٤٥-	٢٠	٥٠	١٠٠٠
٥٥-٧٥	١٧	٦٠	١٠٢٠
	١٠٠		٣٨٣٠

الوسط الحسابى $\overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٣٨٣٠}{١٠٠} = ٣٨,٣$

مثال ٣ :

من البيانات الآتية :

الفئات	صفر	٤-	٨-	١٢-	١٦-٢٠
التكرارات	٤	٧	١٣	١١	٥

اوجد الوسط الحسابى.

الحـــل

ف	ك	س	س ك
صفر-	٤	٢	٨
٤-	٧	٦	٤٢
٨-	١٣	١٠	١٣٠
١٢-	١١	١٤	١٥٤
١٦-٢٠	٥	١٨	٩٠
	٤٠		٤٢٤

الوسط الحسابى $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$

$= \frac{٤٢٤}{٤٠} = ١٠,٦$

مثال ٤ :

من البيانات الآتية اوجد مقياس مناسب (متوسط مناسب) للنزعة المركزية.

٥ ، ٨ ، ٦ ، ١٢٠ ، ١٠

الحـــل

∵ المفردة (١٢٠) تعتبر شاذة متطرفة بالنسبة لباقى القيم

∴ المقياس المناسب هو الوسيط.

الخطوات :

١- ترتيب القيم تصاعدياً ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢٠

٢- ترتيب الوسيط = $\frac{ن + ١}{٢} = \frac{٥ + ١}{٢} = ٣$

٣- قيمة الوسيط هى المفردة الثالثة = ٨

مثال ٥ :

من البيانات الآتية ١٥٠ ، ٤ ، ٦ ، ٣٥٠ ، ٤٠٠ ، ٢٢٠

اوجد الوسيط.

الحـــل

١- ترتيب القيم تصاعدياً : ٤ ، ٦ ، ١٥٠ ، ٢٢٠ ، ٣٥٠ ، ٤٠٠

٢- ترتيب الوسيط = $\frac{ن + ١}{٢} = \frac{٦ + ١}{٢} = ٣,٥$

٣- قيمة الوسيط تقع بين المفردتين الثالثة والربعة.

أى يقع بين الفئتين ١٥٠ ، ٢٢٠ = $\frac{١٥٠ + ٢٢٠}{٢} = ١٨٥$

مثال ٦ :

إذا كان لديك البيانات التالية لفئات الانفاق اليومى بالجنيه لـ ٣٥٠ أسرة

فئات الانفاق	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠ فأكثر
عدد الأسر	١٠	١٢	٣٦	٥٠	٦٠	٨٠	١٠٢

اوجد مقياس مناسب للنزعة المركزية.

الحـــل

∵ جدول التوزيع التكرارى السابق مفتوح.

∴ الوسيط هو أنسب مقاييس النزعة المركزية.

الخطوات:

١- عمل جدول متجمع صاعد

	حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد	
	أقل من ١٠	صفر	
	أقل من ٢٠	١٠	
	أقل من ٣٠	٢٢	
	أقل من ٤٠	٥٨	
	أقل من ٥٠	١٠٨	
بداية الفئة	أقل من ٦٠	١٦٨	التكرار السابق
طول الفئة			١٧٥ ترتيب الوسيط
	أقل من ٧٠	٢٤٨	التكرار اللاحق
	أقل من ٨٠	٣٥٠	

٢- ترتيب الوسيط $= \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٣٥٠}{٢} = ١٧٥$

٣- قيمة الوسيط

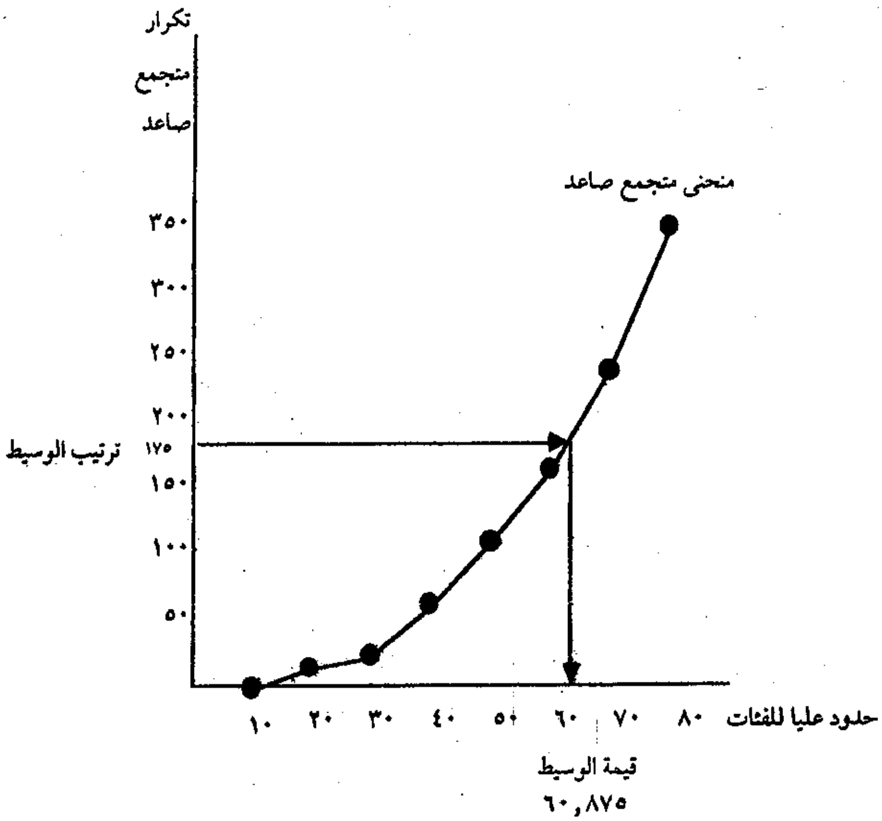
$= \text{بداية الفئة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق} - \text{التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$

$$١٠ \times \frac{١٦٨ - ١٧٥}{١٦٨ - ٢٤٨} + ٦٠ =$$

$$١٠ \times \frac{٧}{٨٠} + ٦٠ =$$

$$٦٠,٨٧٥ = ٠,٨٧٥ + ٦٠ =$$

ويمكن إيجاد الوسيط من المنحنى المتجمع الصاعد كالآتى :



حل آخر:

إيجاد الوسيط باستخدام المنحنى المتجمع الهابط.

(١) عمل جدول متجمع هابط

	حدود سفلى للفئات	تكرار متجمع هابط	
	١٠ فأكثر	٣٥٠	
	٢٠ فأكثر	٣٤٠	
	٣٠ فأكثر	٣٢٨	
	٤٠ فأكثر	٢٩٢	
	٥٠ فأكثر	٢٤٢	
بداية الفئة	٦٠ فأكثر	١٨٢	التكرار السابق
طول الفئة			١٧٥ ترتيب الوسيط
	٧٠ فأكثر	١٠٢	التكرار اللاحق
	٨٠ فأكثر	صفر	

(٢) ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{٢}$ = $\frac{٣٥٠}{٢}$ = ١٧٥

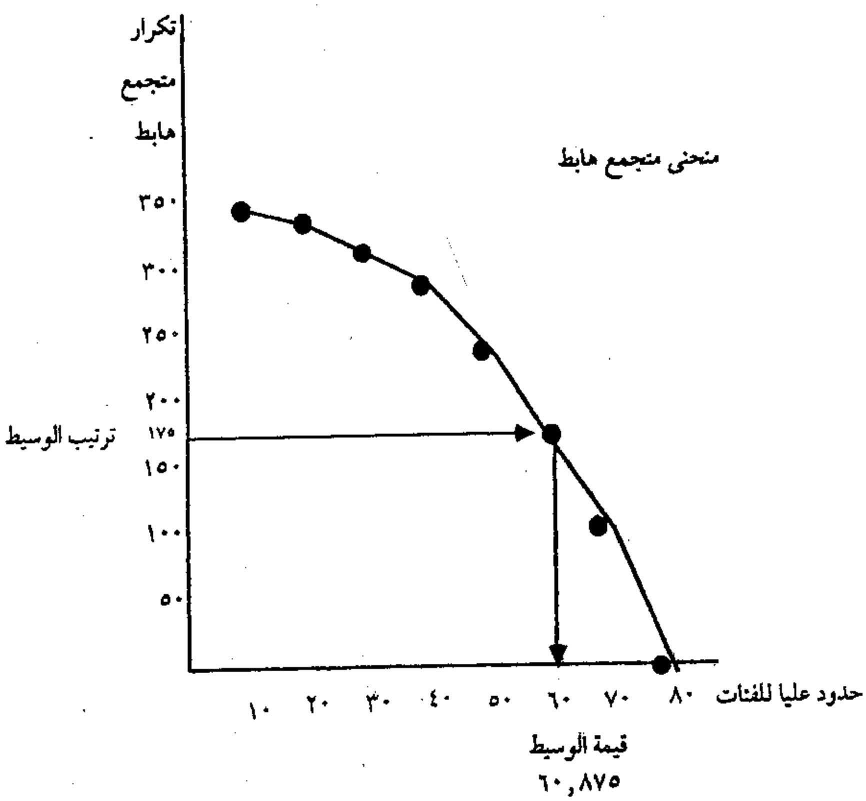
(٣) قيمة الوسيط

$$= \text{بداية الفئة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق} - \text{التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ٦٠ + \frac{١٨٢ - ١٧٥}{١٨٢ - ١٠٢} \times ١٠$$

$$= ٦٠ + \frac{-٧}{-٨٠} \times ١٠ = ٦٠ + ٠,٨٧٥ = ٦٠,٨٧٥$$

بيانياً : برسم المنحنى المجمع الهابط :



مثال ٧ :

اوجد المنوال فى الحالات الآتية :

(١) ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٢٠ ، ٣٠

(٢) جيد ، مقبول ، جيد ، جيد جداً ، ممتاز ، جيد جداً

(٣) منخفض ، مرتفع ، متوسط ، أقل من المتوسط، منخفض جداً

الحــــــل

(١) المنوال = ٣٠

(٢) يوجد منوالين : جيد ، جيد جداً

(٣) لا يوجد منوال.

مثال٨ :

إذا كان لديك البيانات التالية:

فئات	أقل من ٥	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥ فأكثر
تكرارات	٦	٨	١٢	٢٠	١٤	١٠

اوجد المنوال جبرياً وبيانياً.

الحــــــل

يلاحظ أن أطوال الفئات متساوية

	ف	ك	
	أقل من ٥	٦	
	٥-	٨	
	١٠-	١٢	$ف_{١}$= ٢٠-١٢= ٨
بداية الفئة	١٥-	٢٠ ← أكبر تكرار	
طول الفئة	٢٠-	١٤	$ف_{٢}$= ٢٠-١٤= ٦
	٢٥ فأكثر	١٠	

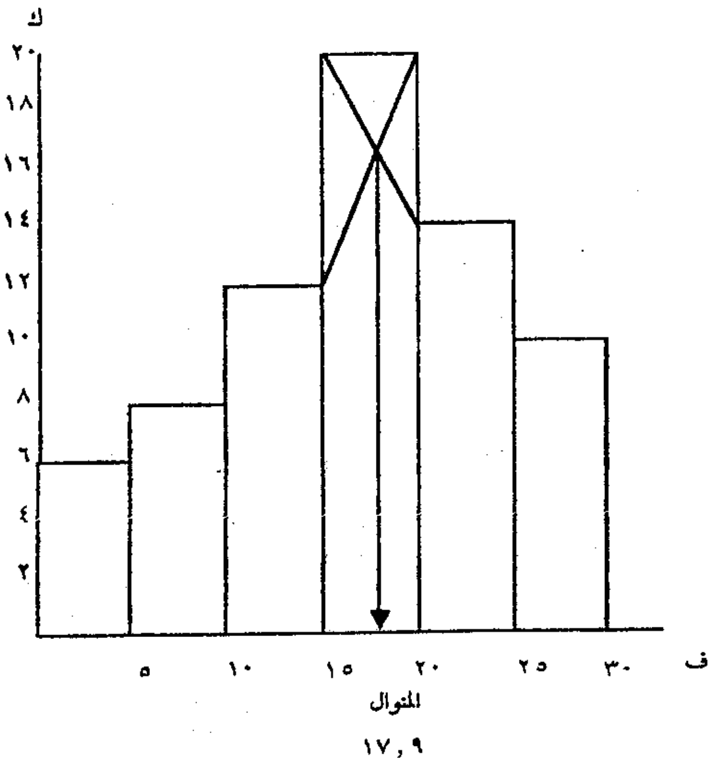
$$\text{المنوال} = \text{بداية الفئة المنوالية} + \frac{ف_{١}}{ف_{١} + ف_{٢}} \times \text{طول الفئة المنوالية}$$

$$= ١٥ + \frac{٨}{٨ + ٦} \times ٥$$

$$= ١٥ + \frac{٤٠}{١٤} = ١٥ + ٢,٩ = ١٧,٩$$

بيانياً :

إيجاد المنوال برسم المدرج التكرارى.



مثال ٩ :

من البيانات الآتية:

ف	٦-	٨-	١٢-	٢٠	٣٠ فأكثر
ك	٦	٨	٤٠	٣٠	٢٠

المطلوب : إيجاد المنوال جبرياً وبيانياً.

الحــــل

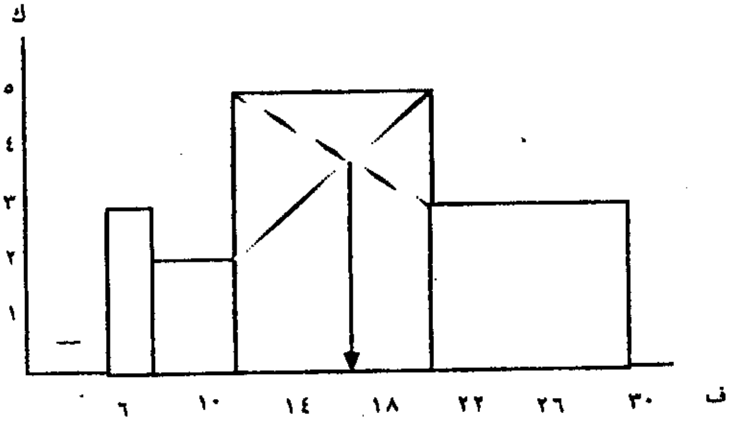
ف	ك	طول الفئة	ك معدل
٦-	٦	٢	٣
٨-	٨	٤	٢ $\quad$ ف$_١$ = ٥ - ٢ = ٣
بداية الفئة ١٢-	٤٠	٨	٥ ← أكبر تكرار معدل .
طول ٢٠-	٣٠	١٠	٣ $\quad$ ف$_٢$ = ٥ - ٣ = ٢
٣٠ فأكثر	٢٠	-	-

$$\text{المنوال} = \text{بداية الفئة} + \frac{\text{ف}_{١}}{\text{ف}_{١} + \text{ف}_{٢}} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ١٢ + \frac{٣}{٣ + ٢} \times ٨$$

$$= ١٢ + \frac{٢٤}{٥} = ١٢ + ٤{,}٨ = ١٦{,}٨$$

المنوال من الرسم



المنوال ٨,١٦

مثال ١٠:

من البيانات الآتية:

ف	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-٦٠
ك	٤	١٨	١٢	٦	٢

اوجد الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال.

الحــــل

الوسط الحسابى

ف	ك	س	س ك
١٠-	٤	١٥	٦٠
٢٠-	٨	٢٥	٢٠٠
٣٠-	١٢	٣٥	٤٢٠
٤٠-	٦	٤٥	٢٧٠
٥٠-٦٠	٢	٥٥	١١٠
	٣٢		١٠٦٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{١٠٦٠}{٣٢} = ٣٣,١٢٥$$

الوسيط

(١) عمل جدول متجمع صاعد

	حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد	
	أقل من ١٠	صفر	
	أقل من ٢٠	٤	
بداية الفئة	أقل من ٣٠	١٢	التكرار السابق
طول الفئة		←	١٦ ترتيب الوسيط
	أقل من ٤٠	٢٤	التكرار اللاحق
	أقل من ٥٠	٣٠	
	أقل من ٦٠	٣٢	

(٢) ترتيب الوسيط $= \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٣٢}{٢} = ١٦$

(٣) قيمة الوسيط

$$= \text{بداية الفئة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق} - \text{التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ٣٠ + \frac{١٦ - ١٢}{٢٤ - ١٢} \times ١٠$$

$$= ٣٠ + \frac{٤٠}{١٢} = ٣٠ + ٣,٣ = ٣٣,٣$$

المنوال

ف	ك	
١٠ -	٤	
٢٠ -	٨	ف$_١$ = ١٢ - ٨ = ٤
بداية الفئة ٣٠-	١٢	← أكبر تكرار
طول الفئة ٤٠-	٦	ف$_٢$ = ١٢ - ٦ = ٦
٥٠-٦٠	٢	

$$\text{المنوال} = \text{بداية الفئة} + \frac{ف_١}{ف_١ + ف_٢} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ٣٠ + \frac{٤}{٤ + ٦} \times ١٠$$

$$= ٣٠ + \frac{٤٠}{١٠} = ٣٠ + ٤ = ٣٤$$

مثال ١١ :

من جدول التوزيع التكرارى التالى :

فئات	٢-	٤-	٦-	٨-	١٠-	١٢-	١٤ فأكثر
تكرارات	١٠	٢٠	٤٠	٦٠	١٠٠	٨٠	٢٠

اوجد الوسط الحسابى.

الحـــــل

. الجدول مفتوح

∴ لا يمكن ايجاد الوسط الحسابى مباشرة

ولكن يمكن ايجاده بأسلوب غير مباشـر باستخدام العلاقة بين المتوسطات الى يتم تطبيقهـا بعد إيجاد الوسيط والمنوال بشرط أن التوزيع يكـون قريب من التماثل فإن العلاقة تكون $\overline{س}$ - المنوال = ٣ ($\overline{س}$ - الوسيط).

أولاً : إيجاد الوسيط :

(١) عمل جدول متجمع صاعد:

	حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد	
	أقل من ٢	صفر	
	أقل من ٤	١٠	
	أقل من ٦	٣٠	
	أقل من ٨	٧٠	
بداية الفئة	أقل من ١٠	١٣٠	التكرار السابق
طول الفئة		←	١٦٥ ترتيب الوسيط
	أقل من ١٢	٢٣٠	التكرار اللاحق
	أقل من ١٤	٣١٠	
	أقل من الحد الأعلى	٣٣٠	

(٢) ترتيب الوسيط = $\frac{مجـ ك}{٢} = \frac{٣٣٠}{٢} = ١٦٥$

(٣) قيمة الوسيط

= بداية الفئة + (ترتيب الوسيط - التكرار السابق) / (التكرار اللاحق - التكرار السابق) × طول الفئة

= ١٠ + (١٦٥ - ١٣٠) / (٢٣٠ - ١٣٠) × ٢

= ١٠ + (٣٥ / ١٠٠) × ٢

= ١٠ + ٧٠ / ١٠٠ = ١٠ + ٠,٧ = ١٠,٧

ثانياً : إيجاد المنوال :

	ف	ك	
	٢-	١٠	
	٤-	٢٠	
	٦-	٤٠	
	٨-	٦٠	ف١ = ١٠٠-٦٠= ٤٠
بداية الفئة	١٠-	١٠٠ ← أكبر تكرار	
طول الفئة	١٢-	٨٠	ف٢= ١٠٠-٨٠= ٢٠
	١٤ فأكثر	٢٠	

$$\text{المنوال} = \text{بداية الفئة} + \frac{\text{ف}_{١}}{\text{ف}_{١} + \text{ف}_{٢}} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ١٠ + \frac{٤٠}{٤٠ + ٢٠} \times ٢$$

$$= ١٠ + \frac{٨٠}{٦٠} = ١٠ + ١,٣ = ١١,٣$$

ثالثاً : إيجاد الوسط الحسابى من العلاقة :

$$\bar{\text{س}} - \text{المنوال} = ٣\,(\bar{\text{س}} - \text{الوسيط})$$

$$\bar{\text{س}} - ١١,٣ = ٣\,(\bar{\text{س}} - ١٠,٧)$$

$$\bar{\text{س}} - ١١,٣ = ٣\,\bar{\text{س}} - ٣٢,١$$

$$-٣\bar{\text{س}} + \bar{\text{س}} = -٣٢,١ + ١١,٣$$

$$-٢\bar{\text{س}} = -٢٠,٨$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{٢٠,٨}{٢} = ١٠,٤$$

مثال ١٢ :

اوجد الوسط الهندسى للقيم ٥ ، ٨ ، ٩ ، ١٠

الحـــــل

لو س	س
٠,٧	٥
٠,٩	٨
٠,٩٥	٩
١	١٠
٣,٥٥	

$$\text{الوسط الهندسى} = \frac{\text{مجـ لو س}}{\text{ن}} = \frac{٣,٥٥}{٤}$$

$$= ٠,٨٨٧٥$$

العدد المقابل = ٧,٧

مثال ١٣ :

إذا كان لديك الجدول التكرارى التالى :

فئات	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-٧٠
تكرارات	١٠	٢٥	٣٥	٢٠	١٠

اوجد الوسط الهندسى.

الحـــــل

ف	ك	س	لو س	لو س × ك
٢٠-	١٠	٢٥	١,٤	١٤
٣٠-	٢٥	٣٥	١,٥٤	٣٨,٥
٤٠-	٣٥	٤٥	١,٦٥	٥٧,٧٥
٥٠-	٢٠	٥٥	١,٧٤	٣٤,٨
٦٠-٧٠	١٠	٦٥	١,٨١	١٨,١
	١٠٠			١٦٣,١٥

الوسط الهندسى = (مجـ لو س × ك) / (مجـ ك) = ١٦٣,١٥ / ١٠٠ = ١,٦٣١٥

العدد المقابل = ٤٢,٨

مثال ١٤ :

إذا كان لديك البيانات الآتية :

٢٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٨٠

اوجد الوسط التوافقى.

الحـــــل

س	١ / س
٢٠	٠,٠٥
٤٠	٠,٠٢٥
٥٠	٠,٠٢
٨٠	٠,٠١٢٥
	٠,١٠٧٥

$$\text{الوسط التوافقى} = \frac{\text{ن}}{\text{مجـ}\left(\frac{1}{\text{س}}\right)} = \frac{4}{0{,}1075} = 37{,}21$$

مثال ١٥ :

إذا كان لديك الجدول التكرارى التالى :

فئات	٢٠-	٤٠-	٦٠-	٨٠-	١٠٠-١٢٠
تكرارات	١٦	١٨	٢٢	١٤	١٠

اوجد الوسط التوافقى.

الحـــــل

ف	ك	س	$\frac{1}{\text{س}}$	$\frac{1}{\text{س}} \times \text{ك}$
٢٠-	١٦	٣٠	٠,٠٣	٠,٤٨
٤٠-	١٨	٥٠	٠,٠٢	٠,٣٦
٦٠-	٢٢	٧٠	٠,٠١٤	٠,٣٠٨
٨٠-	١٤	٩٠	٠,٠١	٠,١٤
١٠٠-١٢٠	١٠	١١٠	٠,٠٠٩	٠,٠٩
	٨٠			١,٣٧٨

$$\text{الوسط التوافقى} = \frac{\text{مجـ ك}}{\text{مجـ}\left(\frac{1}{\text{س}} \times \text{ك}\right)} = \frac{80}{1{,}378} = 58{,}055$$

مثال ١٦ :

من البيانات الآتية ٥ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٥

اوجد مقياس مناسب للتشتت.

الحـــــل

∵ البيانات متجانسة

∴ أنسب مقاييس التشتت هو الانحراف المعيارى.

س	$س - \overline{س}$ س − ١١	$(س - \overline{س})^٢$
٥	٦−	٣٦
١٠	١−	١
١٢	١+	١
١٣	٢+	٤
١٥	٤+	١٦
٥٥	صفر	٥٨

$$\overline{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٥٥}{٥} = ١١$$

$$\text{الانحراف المعيارى } ع = \sqrt{\frac{١}{ن - ١} \; مجـ (س - \overline{س})^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{١}{٥ - ١} \; [٥٨]} = \sqrt{\frac{٥٨}{٤}} = \sqrt{١٤,٥} = ٣,٨$$

مثال ١٧ :

من البيانات الآتية :

فئات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	٦٠-٥٠
تكرارات	٢٠	٤٠	٦٠	٥٠	٣٠

اوجد مقياس مناسب للتشتت.

الحـــــل

ف	ك	س	س ك	$س^2$ ك
-١٠	٢٠	١٥	٣٠٠	٤٥٠٠
-٢٠	٤٠	٢٥	١٠٠٠	٢٥٠٠٠
-٣٠	٦٠	٣٥	٢١٠٠	٧٣٥٠٠
-٤٠	٥٠	٤٥	٢٢٥٠	١٠١٢٥٠
٦٠-٥٠	٣٠	٥٥	١٦٥٠	٩٠٧٥٠
	٢٠٠		٧٣٠٠	٢٩٥٠٠٠

الأنحراف المعيارى $ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ } س^2 ك}{\text{مجـ } ك} - \left(\frac{\text{مجـ } س ك}{\text{مجـ } ك}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{٢٩٥٠٠٠}{٢٠٠} - \left(\frac{٧٣٠٠}{٢٠٠}\right)^2}$$

$$= \sqrt{١٤٧٥ - ١٣٣٢,٢٥}$$

$$= \sqrt{١٤٢,٧٥} = ١١,٩٥$$

مثال ١٨ :

من البيانات الآتية ١٣ ، ١٤ ، ٣٨ ، ٢٣ ، ١٢

المطلوب : إيجاد الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابى وعن الوسيط.

الحـــل

س	س - س̄ س - ٢٠	|س - س̄|	س - الوسيط س - ١٤	|س - الوسيط|
١٣	٧-	٧	١-	١
١٤	٦-	٦	صفر	صفر
٣٨	١٨	١٨	٢٤	٢٤
٢٣	٣	٣	٩	٩
١٢	٨-	٨	٢-	٢
١٠٠	صفر	٤٢		٣٦

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{\text{١٠٠}}{\text{٥}} = \text{٢٠}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجـ} \left|\text{س} - \bar{\text{س}}\right|}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{٤٢}}{\text{٥}} = \text{٨,٤}$$

الوسيط :

(١) ترتيب القيم تصاعدياً : ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ٢٣ ، ٣٨

(٢) ترتيب الوسيط = $\frac{ن + ١}{٢} = \frac{٥ + ١}{٢} = ٣$

(٣) قيمة الوسيط هى المفردة الثالثة = ١٤

الانحراف المتوسط عن الوسيط = $\frac{مجـ|س - الوسيط|}{ن} = \frac{٣٦}{٥} = ٧,٢$

مثال ١٩ :

من البيانات التالية :

فئات الأجر	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-٨٠
عدد العاملين	١٠	٢٠	٣٥	٢٠	١٥

اوجد الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابى وعن الوسيط.

الحـــــل

ف	ك	س	س ك	س - سَ س - ٥٦
٣٠-	١٠	٣٥	٣٥٠	-٢١
٤٠-	٢٠	٤٥	٩٠٠	-١١
٥٠-	٣٥	٥٥	١٩٢٥	-١
٦٠-	٢٠	٦٥	١٣٠٠	٩
٧٠-٨٠	١٥	٧٥	١١٢٥	١٩
مجـ	١٠٠		٥٦٠٠	

|س - سَ|	|س - سَ|ك	س - الوسيط س - ٥٥,٧	|س - الوسيط|	|س - الوسيط|ك
٢١	٢١٠	-٢٠,٧	٢٠,٧	٢٠٧
١١	٢٢٠	-١٠,٧	١٠,٧	٢١٤
١	٣٥	-٠,٧	٠,٧	٢٤,٥
٩	١٨٠	٩,٣	٩,٣	١٨٦
١٩	٢٨٥	١٩,٣	١٩,٣	٢٨٩,٥
	٩٣٠			٩٢١

$$\overline{س} = \frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك} = \frac{٥٦٠٠}{١٠٠} = ٥٦$$

الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابى = $\frac{مجـ\ |س - \overline{س}|\ ك}{مجـ\ ك} = \frac{٩٣٠}{١٠٠} = ٩,٣$

الوسيط :

(١) عمل جدول متجمع صاعد

	حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد	
	أقل من ٣٠	صفر	
	أقل من ٤٠	١٠	
بداية الفئة	أقل من ٥٠	٣٠	السابق
طول			٥٠ ← ترتيب الوسيط
	أقل من ٦٠	٦٥ اللاحق	
	أقل من ٧٠	٨٥	
	أقل من ٨٠	١٠٠	

$$(٢)\ \text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{محـ ك}}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

$$(٣)\ \text{قيمة الوسيط} = \text{بداية الفئة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق} - \text{التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ٥٠ + \frac{٥٠ - ٣٠}{٦٥ - ٣٠} \times ١٠ = ٥٥,٧$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{محـ}\left|\text{س} - \text{الوسيط}\right|\text{ك}}{\text{محـ ك}} = \frac{٩٢١}{١٠٠} = ٩,٢١$$

مثال ٢٠:

إذا كان لديك مجموعتين من القيم

المجموعة الأولى مفرداتها (١٠ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٥ ، ١٥)

المجموعة الثانية مفرداتها (٣ ، ٦ ، ١٨ ، ٩ ، ٤)

المطلوب : مقارنة التشتت بين المجموعتين.

الحـــل

المجموعة الأولى :-

س	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$)^{٢}
١٠	-٥	٢٥
٢٠	٥	٢٥
٢٥	١٠	١٠٠
٥	-١٠	١٠٠
١٥	صفر	صفر
٧٥	صفر	٢٥٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} = \frac{٧٥}{٥} = ١٥$$

$$\text{الانحراف المعيارى ع} = \sqrt{\frac{١}{ن - ١} \text{ مجـ} (س - \bar{س})^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{١}{٥ - ١} \times ٢٥٠} = \sqrt{\frac{٢٥٠}{٤}} = \sqrt{٦٢,٥} = ٧,٩$$

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٧,٩}{١٥} \times ١٠٠ = ٥٢,٧\%$$

المجموعة الثانية :

س	س - $\bar{س}$	$(س - \bar{س})^٢$
٣	-٥	٢٥
٦	-٢	٤
١٨	١٠	١٠٠
٩	١	١
٤	-٤	١٦
٤٠	صفر	١٤٦

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$$

$$\text{الانحراف المعيارى ع} = \sqrt{\frac{1}{\text{ن} - 1} \text{ مجـ} (\text{س} - \overline{\text{س}})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5 - 1} \times 146}$$

$$= \sqrt{\frac{146}{4}} = \sqrt{36,5} = 6,04$$

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{ع}}{\overline{\text{س}}} \times 100$$

$$= \frac{6,04}{8} \times 100 = 75,5\%$$

المجموعة الثانية أكثر تشتتاً (أقل تجانساً) لأن معامل اختلافها أكبر.

مثال ٢١ :

إذا كان هناك ظاهرتين للطول والوزن لـ ٥ طلاب

وكانت بيانات الطول (س) : مجـ س = ٣٠ سم ، مجـ س^2 = ١٩٠ سم

وبيانات الوزن (ص) : مجـ ص = ٤٠ كجم مجـ $(\text{ص} - \overline{\text{ص}})^2$ = ٣٠كجم

المطلوب : مقارنة الشتت بين الطول والوزن

أو هل يعتبر الطول أكثر تشتتاً أو أكثر تجانساً من الوزن.

الحـــــل

ظاهرة الطول (س)

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{١}{\text{ن} - ١}\left[\text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{١}{٥ - ١}\left[١٩٠ - \frac{(٣٠)^{٢}}{٥}\right]} = \sqrt{\frac{١}{٤}\left[١٠\right]} = \sqrt{٢,٥} = ١,٥٨$$

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{ع}}{\bar{\text{س}}} \times ١٠٠ = \frac{١,٥٨}{٦} \times ١٠٠ = ٢٦,٣\%$$

ظاهرة الوزن (ص)

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$$

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{١}{\text{ن} - ١}\left[\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{١}{٥ - ١} \times ٣٠} = \sqrt{\frac{١}{٤}\left[٣٠\right]} = \sqrt{٧,٥} = ٢,٧٤$$

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{ع}}{\bar{\text{ص}}} \times ١٠٠ = \frac{٢,٧٤}{٨} \times ١٠٠ = ٣٤,٢٥\%$$

∴ الوزن أكثر تشتتاً من الطول - الطول أكثر تجانساً من الوزن

مثال ٢٢ :

إذا كان هناك توزيعين كالآتى :

التوزيع الأول	ف	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠	٦٠-٧٠
	ك	٣	٥	٧	١٠	٨	٧

التوزيع الثانى	ف	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥- ٨٥
	ك	١٦	٢٠	٣٦	١٨	١٠

والمطلوب : مقارنة التشتت بين التوزيعين.

الحـــل

∵ الجدولين مغلقين.

∴ تقارن التشتت باستخدام معامل الاختلاف المعيارى لكل منهما.

التوزيع الأول :

ف	ك	س	س ك	س^{٢} ك
١٠-	٣	١٥	٤٥	٦٧٥
٢٠-	٥	٢٥	١٢٥	٣١٢٥
٣٠-	٧	٣٥	٢٤٥	٨٥٧٥
٤٠-	١٠	٤٥	٤٥٠	٢٠٢٥٠
٥٠-	٨	٥٥	٤٤٠	٢٤٢٠٠
٦٠-٧٠	٧	٦٥	٤٥٥	٢٩٥٧٥
	٤٠		١٧٦٠	٨٦٤٠٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{١٧٦٠}{٤٠} = ٤٤$$

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^٢\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{٨٦٤٠٠}{٤٠} - \left(\frac{١٧٦٠}{٤٠}\right)^٢} = ١٤,٩٧$$

$$\text{معامل الاختلاف المعيارى} = \frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٤,٩٧}{٤٤} \times ١٠٠ = ٣٤,٠٢\%$$

التوزيع الثانى :

ف	ك	س	س ك	س^{٢}ك
-٢٥	١٦	٣٠	٤٨٠	١٤٤٠٠
-٣٥	٢٠	٤٠	٨٠٠	٣٢٠٠٠
-٤٥	٣٦	٥٠	١٨٠٠	٩٠٠٠٠
-٥٥	١٨	٦٠	١٠٨٠	٦٤٨٠٠
٦٥-٨٥	١٠	٧٥	٧٥٠	٥٦٢٥٠
	١٠٠		٤٩١٠	٢٥٧٤٥٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٤٩١٠}{١٠٠} = ٤٩,١$$

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^2\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٥٧٤٥٠}{١٠٠} - \left(\frac{٤٩١٠}{١٠٠}\right)^2} = ١٢,٧٩$$

معامل الاختلاف المعيارى $= \frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$

$$= \frac{١٢,٧٩}{٤٩,١} \times ١٠٠ = ٢٦,٠٥٪$$

التوزيع الأول أكثر تشتتاً (أقل تجانساً) من التوزيع الثانى لأن معامل اختلافه أكبر.

مثال ٢٣:

إذا كان لدينا توزيعين لعدد العاملين لشركتين:

فئات الدخل	٢-	٤-	٦-	٨-	١٠-	١٣-	١٦ فأكثر
شركة أ	٤	٨	٩	٣	٦	٨	٢
شركة ب	٨	٥	١٠	٧	١١	١٣	٦

المطلوب: مقارنة تشتت توزيع الدخل فى الشركتين.

الحـــــل

∵ الجدولين مفتوح.

∴ نستخدم معامل الاختلاف الربيعى لمقارنة التشتت بين الشركتين.

الشركة أ : (١) عمل جدول متجمع صاعد.

حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد	
أقل من ٢	صفر	
بداية الفئة أقل من ٤	٤ السابق	
طول		١٠ ترتيب $ر_١$
أقل من ٦	١٢ اللاحق	
أقل من ٨	٢١	
أقل من ١٠	٢٤	
أقل من ١٣	٣٠	ترتيب $ر_٣$
أقل من ١٦	٣٨	
أقل من الحد الأعلى	٤٠	

(٢) ترتيب $ر_١$ $= \frac{\text{مجـ ك}}{٤} = \frac{٤٠}{٤} = ١٠$

ترتيب $ر_٣$ $= \frac{\text{مجـ ك}}{٤} \times ٣ = ١٠ \times ٣ = ٣٠$

(٣) قيمة $ر_١$ $= ٤ + \frac{١٠ - ٤}{١٢ - ٤} \times ٢ = ٥,٥$

قيمة $ر_٣$ = ١٣ هى القيمـة المقابلة للتكرار المتجمع الصـاعد (٣٠) فى خانة الحدود العليا للفئات.

معامل الاختلاف الربيعى $= \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠$

$$= \frac{١٣ - ٥,٥}{١٣ + ٥,٥} \times ١٠٠ = ٤٠,٥٤\%$$

الشركة ب : (١) عمل جدول متجمع صاعد.

	حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد	
	أقل من ٢	صفر	
	أقل من ٤	٨	
بداية الفئة	أقل من ٦	١٣ السابق	
طول		←	١٥ ترتيب $ر_١$
	أقل من ٨	٢٣ اللاحق	
	أقل من ١٠	٣٠	
بداية الفئة	أقل من ١٣	٤١ السابق	
طول		←	٤٥ ترتيب $ر_٣$
	أقل من ١٦	٥٤ اللاحق	
	أقل من الحد الأعلى	٦٠	

(٢) ترتيب $ر_١$ = $\frac{\text{مجـ ك}}{٤} = \frac{٦٠}{٤} = ١٥$

ترتيب $ر_٣$ = $١٥ \times ٣ = ٤٥$

(٣) قيمة $ر_١$ = $٦ + \frac{١٥ - ١٣}{٢٣ - ١٣} \times ٢ = ٦,٤$

$$\text{قيمة } ر_3 = 13 + \frac{45 - 41}{54 - 41} \times 3 = 13.9$$

$$\text{معامل الاختلاف الربيعى} = \frac{13.9 - 6.4}{13.9 + 6.4} \times 100 = 36.95\%$$

الشركـة الأولى أكثـر تشتتـاً بالنسبـة للدخل من الشركة الثـانية لأن مـعامل اختلافها أكبر.

مثال ٢٤ :

من البيانات الآتية ٣٠ ، ١٥ ، ٢٥ ، ١٠ ، ٢٥٠ ، ٢٠

المطلوب :

١- إيجاد مقياس مناسب للنزعة المركزية.

٢- إيجاد مقياس مناسب للتشت.

٣- إيجاد مقياس مناسب للتشتت النسبى.

الحـــــل

يلاحظ أن المفردة (٢٥٠) مفردة شاذة أو متطرفة.

∴ أنسب مقياس للنزعة المركزية هو الوسيط.

أنسب مقياس للتشتت هو نصف المدى الربيعى.

أنسب مقياس للتشتت النسبى هو معامل الاختلاف الربيعى.

الوسيط :

(١) ترتيب القيم تصاعدياً ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٥٠

(٢) ترتيب الوسيط = $\frac{\text{ن} + ١}{٢} = \frac{٦ + ١}{٢} = ٣,٥$

(٣) قيمة الوسيط بين المفردتين الثالثة والرابعة = $\frac{٢٠ + ٢٥}{٢} = ٢٢,٥$

نصف المدى الربيعى :

(١) ترتيب القيم تصاعدياً ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٥٠

(٢) ترتيب الربيع الأول = $\frac{\text{ن}}{٤} = \frac{٦}{٤} = ١,٥$

ترتيب الربيع الثالث = $\frac{\text{ن}}{٤} \times ٣ = \frac{٦}{٤} \times ٣ = ٤,٥$

(٣) قيمة الربيع الأول بين المفردتين الأولى والثانية = $\frac{١٠ + ١٥}{٢} = ١٢,٥$

قيمة الربيع الثالث بين المفردتين الرابعة والخامسة = $\frac{٢٥ + ٣٠}{٢} = ٢٧,٥$

(٤) نصف المدى الربيعى = $\frac{\text{ر}_٣ - \text{ر}_١}{٢} = \frac{٢٧,٥ - ١٢,٥}{٢} = ٧,٥$

معامل الاختلاف الربيعى = $\frac{\text{ر}_٣ - \text{ر}_١}{\text{ر}_٣ + \text{ر}_١} \times ١٠٠$

$= \frac{٢٧,٥ - ١٢,٥}{٢٧,٥ + ١٢,٥} \times ١٠٠$

$$= \frac{١٥}{٤٠} \times ١٠٠ = ٣٧,٥\%$$

مثال ٢٥ :

من البيانات الآتية :

فئات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-٦٠
تكرارات	١٥	٢٠	٢٨	٢٤	١٣

المطلوب : إيجاد مقياس مناسب للنزعة المركزية وللتشتت وللتشتت النسبى.

الحـــــل

∵ الجدول مغلق

∴ أنسب مقياس للنزعة المركزية هو الوسط الحسابى.

أنسب مقياس للتشت هو الانحراف المعيارى.

أنسب مقياس للتشتت النسبى هو معامل الاختلاف المعيارى.

ف	ك	س	س ك	$س^2$ ك
١٠-	١٥	١٥	٢٢٥	٣٣٧٥
٢٠-	٢٠	٢٥	٥٠٠	١٢٥٠٠
٣٠-	٢٨	٣٥	٩٨٠	٣٤٣٠٠
٤٠-	٢٤	٤٥	١٠٨٠	٤٨٦٠٠
٥٠-٦٠	١٣	٥٥	٧١٥	٣٩٣٢٥
	١٠٠		٣٥٠٠	١٣٨١٠٠

$$\text{الوسط الحسابى } \overline{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٣٥٠٠}{١٠٠} = ٣٥$$

$$\text{الانحراف المعيارى ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^{٢}\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١٣٨١٠٠}{١٠٠} - \left(\frac{٣٥٠٠}{١٠٠}\right)^{٢}} = ١٢,٤٩$$

$$\text{معامل الاختلاف المعيارى} = \frac{\text{ع}}{\overline{س}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٢,٤٩}{٣٥} \times ١٠٠ = ٣٥,٦٩\%$$

مثال ٢٦ :

من البيانات الآتية :

فئات	أقل من ٢٠	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠ فأكثر
تكرارات	٥	١٤	٢٠	٣٠	١٨	١٣

اوجد مقياس مناسب للنزعة المركزية وللتشتت وللتشتت النسبى.

الحـــــل

∵ الجدول مفتوح.

∴ أنسب مقياس للنزعة المركزية هو الوسيط.

أنسب مقياس للتشتت هو نصف المدى الربيعى.

أنسب مقياس للتشتت النسبى هو معامل الاختلاف الربيعى.

(١) عمل جدول متجمع صاعد.

	حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد	
	أقل من الحد الأدنى	صفر	
	أقل من ٢٠	٥	
بداية الفئة	أقل من ٣٠	١٩	السابق
طـــول		←	٢٥ ترتيب $ر_1$
بداية الفئة	أقل من ٤٠	٣٩	اللاحق السابق
طـــول		←	٥٠ ترتيب الوسيط
بداية الفئة	أقل من ٥٠	٦٩	اللاحق السابق
طـــول		←	٧٥ ترتيب $ر_3$
	أقل من ٦٠	٨٧	اللاحق
	أقل من الحد الأعلى	١٠٠	

(٢) ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{\text{٢}} = \frac{\text{١٠٠}}{\text{٢}} = \text{٥٠}$

ترتيب الربيع الأول = $\frac{\text{مجـ ك}}{\text{٤}} = \frac{\text{١٠٠}}{\text{٤}} = \text{٢٥}$

ترتيب الربيع الثالث = $\frac{\text{مجـ ك}}{\text{٤}} \times \text{٣} = \text{٢٥} \times \text{٣} = \text{٧٥}$

(٣) قيمة الوسيط

$$= \text{بداية الفئة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق} - \text{التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ٤٠ + \frac{٥٠ - ٣٩}{٦٩ - ٣٩} \times ١٠ = ٤٣,٧$$

قيمة الربيع الأول ($ر_١$)

$$= \text{بداية الفئة} + \frac{\text{ترتيب الربيع الأول} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق} - \text{التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ٣٠ + \frac{٢٥ - ١٩}{٣٩ - ١٩} \times ١٠ = ٣٣$$

قيمة الربيع الثالث ($ر_٣$)

$$= \text{بداية الفئة} + \frac{\text{ترتيب الربيع الثالث} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق} - \text{التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ٥٠ + \frac{٧٥ - ٦٩}{٨٧ - ٦٩} \times ١٠ = ٥٣,٣$$

$$\text{نصف المدى الربيعى} = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢} = \frac{٥٣,٣ - ٣٣}{٢} = ١٠,١٥$$

$$\text{معامل الاختلاف الربيعى} = \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٥٣,٣ - ٣٣}{٥٣,٣ + ٣٣} \times ١٠٠ = ٢٣,٥٢\%$$

الباب الخامس

"الارتباط "
CORRELATION

يعبر الارتباط عن قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين، (أو أكثر).

ومعامل الارتباط تتراوح قيمته بين {+١، -١} فإذا كانت قيمة معامل الارتباط (+١) يقال أن الارتباط طردى تام وإذا كانت قيمته (-١) يقال أن الارتباط عكسى تام وإذا كانت قيمته = صفراً فإنه في هذه الحالة لا يوجد ارتباطاً أو علاقة بين المتغيرين وهذه الحالات الثلاثة السابقة نادرة الحدوث في الحياة الاقتصادية وذلك لطبيعة المتغيرات الاقتصادية وتشابهها وارتباطها ببعضها بدرجات متفاوته، والحالات الغالبة في المشاكل الاقتصادية هى أن يكون معامل الارتباط كسر موجب أو كسر سالب، فإذا كانت قيمة الكسر موجبة فأن الارتباط يكون طرديا وكلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من الواحد الصحيح دل ذلك على قوة العلاقة وبالعكس إذا كانت قيمة معامل الارتباط كسراً سالباً دل ذلك على أن العلاقة عكسية وكلما اقتربت قيمة هذا المعامل من (-١) دل ذلك على قوة العلاقة العكسية وسيتم تناول الموضوعات الآتية :

١- معامل ارتباط بيرسون البسيط.
٢- معامل ارتباط بيرسون من جدول مزدوج لبيانات مبوبة.
٣- معامل ارتباط سبيرمان للرتب.
٤- معامل الاقتران.
٥- معامل التوافق.
٦- معادل الارتباط المتعدد من معاملات الارتباط البسيطة
٧- معامل الارتباط الجزئي.

١- معامل ارتباط بيرسون البسيط
لبيانات غير مبوبة
Pearson's Correlation coefficient

يوضح هذا المعامل قوة واتجاه العلاقة الخطية بين متغيرين إحداهما مستقل (س) والآخر تابع (ص) لعينة عشوائية مسحوبة من مجتمع بياناته موزعة توزيعا طبيعيا ويمكن أن يعبر عنه بالعلاقة الآتية :

$$ر_{س ص} = \frac{تغ_{س ص}}{\sqrt{تباين_{(س)}} \sqrt{تباين_{(ص)}}} \qquad (١)$$

حيث أن :

$ر_{س ص}$: معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين س،ص.

$تغ_{س ص}$: تغاير س،ص

$$= \frac{مجـ (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{ن}$$

$تباين_{س}$: هو مربع الانحراف المعياري للمتغير (س)

$$= \frac{مجـ (س - \bar{س})^{٢}}{ن}$$

$تباين_{ص}$: هو مربع الانحراف المعياري للمتغير (ص).

$$\frac{مجـ (ص - \bar{ص})^{٢}}{ن}$$

$\bar{\text{س}}$ = الوسط الحسابى للمتغير (س) = $\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$

$\bar{\text{ص}}$ = الوسط الحسابى للمتغير (ص) = $\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$

ن : حجم العينة

وعليه يمكن إعادة كتابة الصيغة (١) السابقة كالآتى :

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{مجـ }(\text{س} - \bar{\text{س}})\text{٢ }(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\text{ن} \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{\text{٢}}}{\text{ن}}} \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{\text{٢}}}{\text{ن}}}}$$

$$\boxed{\frac{\text{مجـ }(\text{س} - \bar{\text{س}})\ (\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{\text{٢}}} \sqrt{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{\text{٢}}}}} \qquad (\text{٢})$$

وحيث أنه فى كثير من الحالات تكون قيمة الأوساط الحسابية ($\bar{\text{س}}$ أو $\bar{\text{ص}}$) أو كلاهما ليست أعدادا صحيحة، فى هذه الحالة يكون بسط العلاقة (٢) السابقة هو :

$$= \text{مجـ }(\text{س} - \bar{\text{س}})\ (\text{ص} - \bar{\text{ص}})$$

$$= \text{مجـ }\{\text{س ص} - \text{س }\bar{\text{ص}} - \bar{\text{س}}\text{ ص} + \bar{\text{س}}\ \bar{\text{ص}}\}$$

$$= \text{مجـ س ص} - \bar{\text{س}}\text{ مجـ ص} - \bar{\text{ص}}\text{ مجـ س} + \text{ن }\bar{\text{س}}\ \bar{\text{ص}}$$

$$= \text{مجـ س ص} - \left|\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right| (\text{مجـ ص}) - \left|\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right| (\text{مجـ س}) + \text{ن} \left|\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right| \left|\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right|$$

$$= \text{مجـ س ص} - \text{٢ } \frac{\text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن}} + \frac{\text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن}}$$

$$= \text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن}} \longleftarrow (\text{أ})$$

ويكون مقام العلاقة (٢) السابقة هو :

$$\text{مجـ} (\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}$$

$$= \text{مجـ} \{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} \bar{\text{س}} + \bar{\text{س}}^{٢}\}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - ٢\bar{\text{س}} \text{ مجـ س} + \text{ن } \bar{\text{س}}^{٢}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - ٢ \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} (\text{مجـ س}) + \text{ن} \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{٢}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - ٢ \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}} + \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}} \longleftarrow (\text{ب})$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن إثبات أن :

$$\text{مجـ} (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢} = \text{مجـ ص}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ص})^{٢}}{\text{ن}} \longleftarrow (\text{جـ})$$

ومن العلاقات (أ)، (ب)، (جـ) السابقة يمكن إعادة كتابة العلاقة (٢) السابقة كالآتي :

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن}}}{\sqrt{\text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}} \sqrt{\text{مجـ ص}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ص})^{٢}}{\text{ن}}}} \longleftarrow (٣)$$

وزيادة في التبسيط إذا تم ضرب البسط والمقام في العلاقة (٣) السابقة فإنه ينتج الآتي :

$$\boxed{\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}} \sqrt{\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}}}} \longleftarrow (٤)$$

لاختبار جوهرية معامل ارتباط بيرسون البسيط :

١- الفرض الأصلي أو فرض العدم : معامل الارتباط لا يختلف جوهريا عـــن الصفر.

٢- الفرض البديل : معامل الارتباط يختلف جوهريا عن الصفر.

٣- مستوى المعنوية α = ٥%.

٤- المقياس الاحصائي المناسب : توزيع (ت)

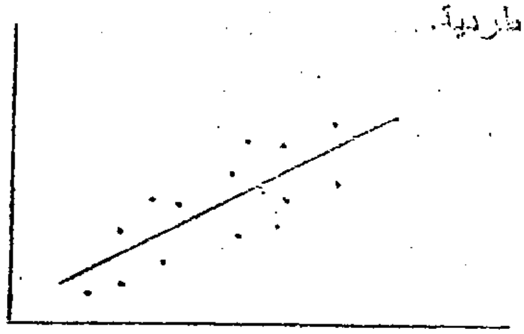
$$ت^* = \left| ر \frac{\sqrt{ن - ٢}}{\sqrt{١ - ر^٢}} \right|$$

٥- إجراء العمليات الحسابية

٦- القـــــرار.

إذا كانت قيمة ت* > ت النظرية بدرجات حرية (ن-٢) وعند مســتوى المعنوية المفترض.

فإن ذلك يدل على وجود علاقة جوهرية بين س، ص والعكس صحيح ويلاحظ أن شكل الانتشار يمكن أن يعطى فكرة مبدئية عن شكل واتجاه العلاقـــة بين المتغيرين س، ص فإذا كان شكل الانتشار يشبه الشكل (١) التالي دل ذلـــك على وجود علاقة طردية.

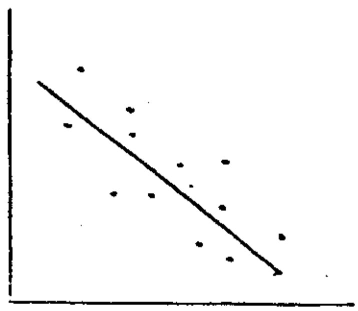


الشكل (١)

علاقة خطية طردية

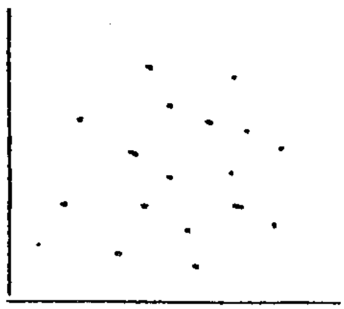
وكلما اقتربت النقط من بعضها دل ذلك على قوة العلاقة الطردية والعكس صحيح أما الشكل رقم (٢) التالى فيشير أن العلاقة يمكن أن تكون عكسية.

والشكل رقم (٣) التالى يشير أنه لا توجد علاقة أو أن العلاقة ضعيفة جدا.



الشكل (٢)

العلاقة عكسية



الشكل (٣)

العلاقة ضعيفة جدا

أو لا توجد علاقة

مثال (١) الأتى يمثل بيانات عينة عشوائية من (١٠) أفراد.

الدخل	١٥	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	١٢	١٤	= ٨٠
الاستهلاك	٨	٦	٦	٥	٨	٧	٥	٦	٩	١٠	= ٧٠

المطلوب :

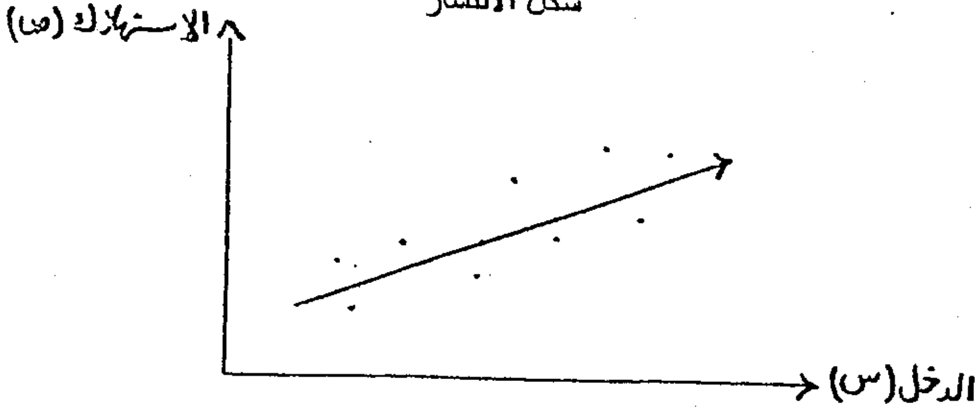
١- ارسم شكل الانتشار ومنه تبين نوع العلاقة.

٢- أوجد معامل الارتباط البسيط لبيرسون.

٣- اختبر جوهرية العلاقة عند مستوى معنوية α = ٥٪.

الحـــل :

شكل الانتشار



شكل الانتشار السابق يشير إلى أن هناك علاقة خطية طردية بين الدخـل والاستهلاك.

<u>لإيجاد معامل الارتباط :</u>

الوسط الحسابى لـ س

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} = \frac{٩٠}{١٠} = ٩$$

$$\bar{ص} = \frac{\text{مجـ ص}}{ن} = \frac{٧٠}{١٠} = ٧$$

وحيث أن كل من $\bar{س}$، $\bar{ص}$ أعدادا صحيحة فنى هذه الحالـــة يمكــن استخدام الصيغة رقم (٢) السابقة لحساب معامل الارتباط كالأتى :

$$ر_{س ص} = \frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\text{مجـ}(س - \bar{س})^{٢}}\sqrt{\text{مجـ}(ص - \bar{ص})^{٢}}} \qquad (٢)$$

ويمكن إيجاد المجاميع السابقة عن طريق عمل الجدول الأتي :

س	ص	س-س̄	ص-ص̄	(س-س̄) (ص-ص̄)	(س-س̄)٢	(ص-ص̄)٢
١٥	٨	٦	١	٦	٣٦	١
١٠	٦	١	-١	-١	١	١
٩	٦	صفر	-١	٠	٠	١
٨	٥	-١	-٢	٢	١	٤
٧	٨	-٢	١	-٢	٤	١
٦	٧	-٣	٠	٠	٩	٠
٥	٥	-٤	-٢	٨	١٦	٤
٤	٦	-٥	-١	٥	٢٥	١
١٢	٩	٣	٢	٦	٩	٤
١٤	١٠	٥	٣	١٥	٢٥	٩
٩٠	٧٠	٠	٠	٣٩	١٢٦	٢٦

وبالتعويض في العلاقة (٢) السابقة :

$$ر_{س ص} = \frac{٣٩}{\sqrt{١٢٦}\ \sqrt{٢٦}}$$

$$= \frac{٣٩}{\sqrt{٣٢٧٦}} = \frac{٣٩}{٥٧,٢٣٦} = ٠,٦٨١$$

∴ هناك علاقة طردية بين الدخل والاستهلاك.

المطلوب الثالث : اختبار جوهرية معامل الارتباط :

١- الفرض الأصلى أو فرض العدم : لا توجد علاقة جوهرية.

٢- الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية.

٣- مستوى المعنوية α = ٥%.

٤- المقياس المناسب : توزيع (ت).

$$ت = \left| \frac{ر \sqrt{ن - ٢}}{\sqrt{١ - ر^{٢}}} \right|$$

٥- العمليات الحسابية

$$ت^{*} = \left| \frac{,٦٨١ \sqrt{ن - ٢}}{\sqrt{١ - (,٦٨١)^{٢}}} \right| = \left| \frac{,٦٨١ \sqrt{٨}}{\sqrt{١ - ,٤٦٤}} \right|$$

$$= \left| \frac{,٦٨١ \times ٢,٨٢٨}{\sqrt{,٥٣٦}} \right| = \left| \frac{١,٩٢}{,٧٣٢} = ٢,٦٣١ \right|$$

يلاحظ أن قيمة (ت) النظرية عند مستوى معنوية α = ٥%. وبدرجات حرية = (ن-٢) = ٢,٣٠٦.

٥- القـــرار :

حيث أن ت* > ت النظرية

∴ معامل الارتباط جوهرى أو معنوى ولا يرجع إلى الصدفـــة وذلـك بمستوى معنوية α = ٥%.

مثال (٢) :

الآتي يمثل عينة عشوائية اختيرت من (٨) مدن مختلفة لقياس العلاقة بين سعر سلعة استهلاكية بالجنيهات والكمية المباعة منها بالألف طن.

السعر س	٧	٩	٦	٨	٥	٨	١٠	٩	٦٢ -
الكمية ص	٩	٧	١٠	٨	١٢	٧	٦	٧	٦٦ -

والمطلوب : حدد نوع وقوة العلاقة بين السعر والكمية المباعة واختبر جوهريتها عند مستوى معنوية α = ٥%.

إذا علمت أن قيمة ت النظرية بدرجات حرية (٦) = ٢,٤٤٧.

الحل :

$$\bar{س} = \frac{٦٥}{٨} = ٧,٧٥$$

$$\bar{ص} = \frac{٦٥}{٨} = ٨,٢٥$$

وحيث أن $\bar{س}$ و $\bar{ص}$ أعدادا كسرية ففى هذه الحالة يمكن استخدام الصيغة رقم (٤) السابقة لإيجاد معامل الارتباط :

$$\frac{ن\ مجـ\ س\ ص - مجـ\ س\ مجـ\ ص}{\sqrt{ن\ مجـ\ س^{٢} - (مجـ\ س)^{٢}}\ \sqrt{ن\ مجـ\ ص^{٢} - (مجـ\ ص)^{٢}}} \longleftarrow (٤)$$

ويمكن إيجاد المجاميع السابقة عن طريق عمل جدول كالأتى :

س	ص	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
٧	٩	٦٣	٤٩	٨١
٩	٧	٦٣	٨١	٤٩
٦	١٠	٦٠	٣٦	١٠٠
٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
٥	١٢	٦٠	٢٥	١٤٤
٨	٧	٥٦	٦٤	٤٩
١٠	٦	٦٠	١٠٠	٣٦
٩	٧	٦٣	٨١	٤٩
٦٢	٦٦	٤٨٩	٥٠٠	٥٧٢

وبالتعويض فى العلاقة (٤) السابقة مع ملاحظة أن (ن) = ٨ ينتج الأتى:

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{٨ (٤٨٩) - (٦٢) (٦٦)}}{\sqrt{\text{٨ (٥٠٠) - (٦٢)}^{٢}}\ \sqrt{\text{٨ (٥٧٢) - (٦٦)}^{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٣٩١٢} - \text{٤٠٩٢}}{\sqrt{\text{٤٠٠٠} - \text{٣٨٤٤}}\ \sqrt{\text{٤٥٧٦} - \text{٤٣٥٦}}} = \frac{-\text{١٨٠}}{\sqrt{\text{١٥٦}}\ \sqrt{\text{٢٢٠}}}$$

$$= \frac{-\text{١٨٠}}{\sqrt{\text{٣٤٣٢٠}}} = \frac{-\text{١٨٠}}{\text{١٨٥,٢٥٧}} = -\text{,٩٧٢}$$

∴ هناك علاقة عكسية قوية

أختبار جوهرية العلاقة :

١- فرض العدم : لا توجد علاقة جوهرية بين المتغيرين.

٢- الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية بين المتغيرين.

٣- مستوى المعنوية α = ٥%.

٤- المقياس المناسب : توزيع ت

$$ت^{\cdot} = \left| \frac{ر \sqrt{ن - ٢}}{\sqrt{١ - ر^{٢}}} \right|$$

٥- العلاقات الحسابية :

$$ت^{\cdot} = \left| \frac{-,٩٧٢ \sqrt{٨-٢}}{\sqrt{١ - (-,٩٧٢)^{٢}}} \right| = \left| \frac{-,٩٧٢ \sqrt{٦}}{\sqrt{١ - ,٩٤٥}} \right|$$

$$= \left| \frac{-,٩٧٢ \times ٢,٤٥}{\sqrt{,٠٥٥}} \right| = \left| \frac{- ٢,٣٨١}{,٢٣٥} \right| = ١٠,١٣٤$$

٥- القــرار

حيث أن $ت^{\cdot}$ > ت النظرية.

∴ علاقة الارتباط العكسية السابقة جوهرية ولا ترجع للصدفة بمستوى معنوية α = ٥%.

٢- معامل ارتباط بيرسون من جدول مزدوج
(لبيانات مبوبة)

إذا كان الغرض هو معرفة قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين وكان حجم العينة العشوائية المختارة كبير نسبيا فيمكن وضع بيانات العينة فى صورة فئات وتكرارات أو تبويبها فى جدول توزيع تكرارى مزدوج.

ويمكن إيجاد معامل الارتباط فى هذه الحالة باستخدام العلاقة الآتية :

$$ر_{س ص} = \frac{\text{مجـ}\,(\text{ك}\ \text{ح}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{ص}}) - (\text{مجـ ك})\,(\text{ح}'_{\text{س}})\,(\text{ح}'_{\text{ص}})}{\text{مجـ ك}\,(\text{ع}_{\text{س}})\,(\text{ع}_{\text{ص}})} \qquad (٦)$$

ويمكن اتباع الخطوات الآتية :

أولاً: عمل جدول بسيط لـ س كالآتى :

$\text{ف}_{\text{س}}$	ك	س	$\text{ح}_{\text{س}}$	$\text{ح}_{\text{س}}$ ك	$\text{ح}^2_{\text{س}}$ ك

واستخـــراج

$$(١)\ \text{ح}'_{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ح}_{\text{س}}\,\text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$

(٢) الانحراف المعيارى ل (س)

$$ع_{س} = \sqrt{\frac{مجـ\ ح'^{2}_{س}\ ك}{مجـ\ ك} - \left(\frac{مجـ\ ح'_{س}\ ك}{مجـ\ ك}\right)^{2}}$$

ثانيا: عمل جدول بسيط للمتغير (ص) كالأتى :

$ف_{ص}$	ك	س	$ح'_{ص}$	$ح_{ص}$ ك	$ح'^{2}_{ص}$ ك

استخـــــراج

(١) $ح'_{ص} = \frac{مجـ\ ح_{ص}\ ك}{مجـ\ ك}$

(٢) الانحراف المعيارى ل (ص)

$$ع_{ص} = \sqrt{\frac{ح'^{2}_{ص}\ ك}{مجـ\ ك} - \left(\frac{مجـ\ ح_{ص}\ ك}{مجـ\ ك}\right)^{2}}$$

ثالثاً: عمل جدول مزدوج للمتغير (س، ص) معا واستخراج مجـ ك ح س ح س

مثال (٣) :

اختيرت عينة عشرائية من ١٠٠ طالب من طلبة كلية التجارة جامعة عين شمس لمعرفة العلاقة بين طول الطلبة وأوزانهم ووضعت البيانات في الجدول الآتى :

الوزن (ص) / الطول (س)	٥٠ -	٦٠ -	٧٠ -	٨٠-٩٠	المجموع
١٥٢ -	٧	٥			١٢
١٥٨ -	٤	١٥	١٢		٣١
١٦٤ -		٩	١٥		٢٤
١٧٠ -		٨	١٢	٨	٢٨
١٧٦-١٨٢				٥	٥
المجموع	١١	٣٧	٣٩	١٣	١٠٠

والمطلوب : معرفة ما إذا كان هناك علاقة جوهرية بين الطول والوزن وذلك بمستوى معنوية α = ٥%. إذا علمت أن قيمة ت النظرية بدرجات حرية (٩٨) = ١,٩٨.

الحــل :

يلاحظ أن حجم العينة أو مجـ ك = ١٠٠

$= \sqrt{٤٨,٢٨}$

$= ٦,٩٥$

ثالثاً: عمل جدول بسط للمتغير (ص)

فئات ص $ف_{ص}$	تكرارات (ص) ك	مراكز الفئات ص	س-أ $ح_{ص}$	$ح_{ص}ك$	$ح^{٢}_{ص}ك$
٥٠ -	١١	$\frac{٦٠-٥٠}{٢} = ٥٥$	٢٠ -	٢٢٠ -	٤٤٠٠
٦٠ -	٣٧	$\frac{٧٠-٦٠}{٢} = ٦٥$	١٠ -	٣٧٠ -	٣٧٠٠
٧٠ -	٣٩	٧٥ أ	٠	٠	٠
٨٠ - ٩٠	١٣	٨٥	١٠	١٣٠	١٣٠٠
مجـ	١٠٠			٤٦٠ -	٩٤٠٠

$$ح'_{ص} = \frac{مجـ\ ح_{ص}ك}{مجـ\ ك} = \frac{-٤٦٠}{١٠٠} = ٤,٦$$

$$ع_{ص} = \sqrt{\frac{٩٤٠٠}{١٠٠} - \left(\frac{٤٦٠}{١٠٠}\right)^{٢}} = \sqrt{٩٤ - ٢١,١٦}$$

$= ٨,٥٣٥$

ثالثاً: عمل جدول مزدوج للمتغيرين س ، ص

ح س	ص / س	٥٠ -	٦٠ -	٧٠ -	٨٠-٩٠	مجـ
	ح ص	٢٠ -	١٠ -	٠	١٠	
٦-	١٥٢ -	٧ ٨٤٠	٥ ٣٠٠	١٢		١١٤٠
	١٥٨ -	٤ ٠	١٥ ٠	١٢ ٠		٠
٦	١٦٤-		٩ ٥٤٠-	١٥ ٠		٥٤٠-
١٢	١٧٠-		٨ ٩٦٠-	١٢ ٠	٨ ٩٦٠	٠
١٨	١٧٦-١٨٢				٥ ٩٠٠	٩٠٠
	مجـ	٨٤٠	١٢٠٠ -	٠	١٨٦٠	١٥٠٠

مجـ (ك حس حص)

يلاحظ أن الأرقام داخل المربعات الصغيرة ناتجة عن حاصل ضــرب التكــرار (ك) × ح س المناظرة × ح ص المناظرة.

فمثلاً الرقم ٨٤٠ ⟸ ٧ × ٦- × ٢٠-

٣٠٠ ⟸ ٥ × ٦- × ١٠-

... وهكـــذا،،

معامل الارتباط :

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{مجـ}\,(\text{ك ح}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{ص}}) - (\text{مجـ ك})\,(\text{ح}'_{\text{س}})\,(\text{ح}'_{\text{ص}})}{\text{مجـ ك}\,(\text{ع}_{\text{س}})\,(\text{ع}_{\text{ص}})}$$

$$= \frac{\text{١٥٠٠} - \text{١٠٠ت} \times \text{٤,٩٨} \times \text{٤,٦٠٠}}{\text{١٠٠} \times \text{٦,٩٥} \times \text{٨,٥٣٥}}$$

$$= \frac{\text{١٥٠٠} + \text{٢٢٩٠,٨}}{\text{٥٩٣١,٨٢٥}} = \frac{\text{٣٧٩٠,٨}}{\text{٥٩٣١,٨٢٥}} = \text{,٦٣٩}$$

∴ هناك علاقة طردية بين الطول والوزن.

اختبار جوهرية العلاقة :

١- فرض العدم : لا توجد علاقة جوهرية بين الطول والوزن.

٢- الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية بين الطول والوزن.

٣- مستوى المعنوية α = ٥%.

٤- المقياس المناسب : توزيع (ت)

$$\text{ت} = \left| \frac{\text{ر} \sqrt{\text{ن} - \text{٢}}}{\sqrt{\text{١} - \text{ر}^{\text{٢}}}} \right|$$

٥- العمليات الحسابية

$$= \left| \frac{\text{,٦٣٩} \sqrt{\text{٩٨}}}{\sqrt{\text{١} - (\text{,٦٣٩})^{\text{٢}}}} \right| = \text{٩,٣١٦}$$

٥- القـــرار

حيث أن ت* > ت النظرية

∴ العلاقة جوهرية بمستوى معنوية α = ٥%.

٣- معامل ارتباط سبيرمان للرتب
Spearman Rank Correlation Coefficient

يندرج معامل ارتباط سبيرمان للرتب ضمن الإحصاءات الـــلا معلميــه Non- Prametric Statistics والتى لا يشترط فيها أن يكون المجتمع موزعــاً توزيعا طبيعيا كما هو الحال بالنسبة لمعامل ارتباط بيرسون.

ويفضل استخدام معامل ارتباط سبيرمان فى إيجادة قوة واتجاه العلاقــــة بين متغيرين غير رقميين كما هو الحال فى تقديرات الطلبة (جيد، جيــد جـداً، ممتاز..) أو إذا كانت البيانات فى صورة معدلات أو نسب مئوية أو مرتبة طبقــاً لنظام معين مثل رأى خبير رياضى فى ترتيب مجموعة من اللاعبين.

ويمكن اتباع الخطوات الآتية :

(١) عمل جدول كالآتى :

المتغير الأول	المتغير الثانى	الترتيب التنازلى للمتغير الأول	الترتيب التنازلى للمتغير الثانى	فروق الرتب (ف)	مربع فروق الرتب ف٢

(٢) معامل ارتباط سبيرمان للرتب :

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$$

حيث أن مجـ ف٢ : هى مجموع مربعات فروق الرتب :

ن : حجم العينة.

(٣) اختبار معنوية معامل ارتباط سبيرمان للرتب :

إذا كانت قيمة معامل الارتباط المحسوبة ≤ القيمة النظرية الموجودة في الجدول فأن هذا يعني وجود علاقة جوهرية بين المتغيرين والعكس صحيح ويلاحظ أن الاختبار السابق خاص بالبيانات التي يقل حجمها عن ٣٠ مفردة أما إذا كان حجم العينة > ٣٠ فأنه يستخدم اختبار (Z).

مثال (٤) :

البيانات الآتية تمثل تقديرات (١٠) طلاب اختيروا بطريقة عشوائية بالنسبة لمادتي الإحصاء والمحاسبة.

رقم الطالبة	الإحصاء	المحاسبة
١	جيد	جيد
٢	جيد جدا	ممتاز
٣	ممتاز	ممتاز
٤	مقبول	جيد
٥	ضعيف	مقبول
٦	جيد	مقبول
٧	ضعيف جداً	ضعيف
٨	جيد	مقبول
٩	جيد جداً	جيد جداً
١٠	مقبول	ضعيف

والمطلوب : هل هناك علاقة جوهرية بين تقديرات الطلبة في المادتين وما هي قوة واتجاه العلاقة.

الترتيب التنازلي للمحاسبة :

أعلى تقدير هو : (ممتاز ، ممتاز) ⟵ $\frac{1+2}{2} = 1.5$

التقدير التالي هو : (جيد جداً) ⟵ $= 3$

(جيد، جيد) ⟵ $\frac{4+5}{2} = 4.5$

(مقبول، مقبول، مقبول) ⟵ $\frac{6+7+8}{3} = 7$

(ضعيف، ضعيف) ⟵ $\frac{9+10}{2} = 9.5$

معامل ارتباط سبيرمان للرتب :

$$ر = 1 - \frac{6 \text{ مجـ } ف^2}{ن(ن^2-1)}$$

$$ر = 1 - \frac{6 \times 27}{10(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{162}{990}$$

$$= 1 - 0.164 = 0.836$$

∴ هناك علاقة طردية قوية بين تقديرات الإحصاء والمحاسبة

اختبار جوهرية العلاقة :

يلاحظ أن قيمة معامل ارتباط سبيرمان النظرية من الجدول أمام حجم العينة (10) = 0.649.

وحيث أن قيمة ر* المحسوبة > قيمة ر النظرية.

∴ العلاقة جوهرية عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

مثال (٥) :

الآتى يمثل عينة عشوائية من (٨) أسرا اختيروا لمعرفة العلاقة بين الدخل ونسبة المنفق على اللحوم.

رقم الأسرة	مستوى الدخل	نسبة المنفق على اللحوم
١	مرتفع	١٠%
٢	مرتفع جداً	١٥%
٣	متوسط	١٦%
٤	أقل من المتوسط	١٧%
٥	منخفض	١٨%
٦	منخفض جداً	٢٠%
٧	متوسط	١٨%
٨	أقل من المتوسط	١٤%

المطلوب : أوجد معامل الارتباط المناسب واختبر جوهريته عند مستوى معنوية α = ٥%.

الحل : حيث أن البيانات وصفية ونسب مئوية.

∴ يستخدم معامل ارتباط سبيرمان للرتب ويمكن إيجاده كالآتى :

الدخل	الأنفاق	رتب الدخل	رتب الإنفاق	ف	ف٢
مرتفع	١٠%	٢	٨	٦-	٣٦
مرتفع جداً	١٥%	١	٦	٥-	٢٥
متوسط	١٦%	٣,٥	٥	١,٥-	٢,٢٥
أقل من المتوسط	١٧%	٥.٥	٤	١,٥	٢,٢٥
منخفض	١٨%	٧	٢,٥	٤,٥	٢٠,٢٥
منخفض جداً	٢٠%	٨	١	٧	٤٩
متوسط	١٨%	٣,٥	٢,٥	١	١
أقل من المتوسط	١٤%	٥.٥	٧	١,٥ -	٢,٢٥
مجـ					١٣٨

يلاحظ أن حجم العينة (ن) = ٨

$$ر = ١- \frac{٦ \text{ مجـ } ف٢}{ن (ن^٢-١)}$$

$$ر = ١- \frac{٦×١٣٨}{٨ (٦٤-١)}$$

$$= ١- \frac{٨٢٨}{٥٠٤} = ١,٦٤٣ - ١ = ,٦٤٣$$

∴ هناك علاقة عكسية.

اختبار جوهرية معامل الارتباط :

يلاحظ أنه قيمة معامل الارتباط النظرية من الجدول أمام حجم العينة (٨) = ,٧٣٨.

وحيث أن قيمة ر* المحسوبة < قيمة ر النظرية.

∴ العلاقة غير جوهرية راجعة للصدفة بمستوى معنوية α = ٥%.

ويلاحظ أن اختبار معنوية ر* المحسوبة على أساس القيمة المطلقة لها أى |ر*| = ,٦٤٣.

مثال (٦) :

تم ترتيب ١١ لاعباً لكرة القدم عن طريق اثنين من الخبراء الرياضيين ووضع الترتيب في جدول كالآتي :

اللاعب	رأى الخبير الأول	رأى الخبير الثانى
هادى	٥	١١
حازم	٦	٤
إبراهيم	٢	٩
علاء	٧	٣
رضا	١	٢
حسام	٨	١
هانى	٤	١٠
عمارة	٩	٥
عبد الستار	٣	٨
محمد	١٠	٦
خالد	١١	٧

والمطلوب : معرفة مدى توافق الرأى بين الخبيرين واختبار الجوهرية..

الحل :

يلاحظ أن البيانات السابقة عبارة عن ترتيب للاعبين.

∴ تستخدم معامل ارتباط سبيرمانه للرتب كالآتي :

الحـــــل :

الرتب حسب الخبير الأول	الرتب حسب الخبير الثانى	فروق الرتب (ف)	$ف^2$
٥	١١	٦-	٣٦
٦	٤	٢	٤
٢	٩	٧-	٤٩
٧	٣	٤	١٦
١	٢	١-	١
٨	١	٧	٤٩
٤	١٠	٦-	٣٦
٩	٥	٤	١٦
٣	٨	٥-	٢٥
١٠	٦	٤	١٦
١١	٧	٤	١٦
			٢٦٤

معامل ارتباط سبيرمان للرتب :

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^2}{ن(ن^2-١)}$$

$$ر = ١ - \frac{٦\times٢٦٤}{١١(١٢١-١)}$$

$$= ١ - \frac{١٥٨٤}{١٣٢٠} = -٫٢$$

∴ العلاقة عكسية ضعيفة

اختبار جوهرية العلاقة :

- حيث أن ر النظرية من الجدول عند حجم العينة (١١) = ٠٫٦٠٩
- وحيث أن |ر*| المحسوبة < ر النظرية.

∴ العلاقة تعتبر غير جوهرية أو راجعة للصدفة بمستوى معنوية α = ٥%.

٤- معامل الاقتران
Coefficient of Association

يستخدم لمعرفة قوة واتجاه العلاقة بين ظـــاهرتين وكـل ظـاهرة لـها خاصيتين اثنتين فقط مثل العلاقة بين التدخين والإصابة بمرض معين، حيـث أن ظاهرة التدخين تنقسم إلى مدخنين وغير مدخنين وظاهرة الإصابـــة بـالمرض تنقسم إلى أصيب ولم يصاب بالمرض.

أو ظاهرة تجربة السلعة وظاهرة الإقبال على شـــرائها، حيـث تنقسـم ظاهرة تجربة السلعة إلى جرب السلعة ولم يجرب، وظاهرة الإقبال على الشـراء تنقسم إلى اشترى ولم يشترى، حيث يتم وضع بيانات العينة بفرض أنـــها عـن ظاهرتى التدخين والإصابة بالمرض فى جدول كالأتى :

الإصابة

التدخين		أصيب	لم يصاب
	مدخن	ك ١١	ك ٢١
	غير مدخن	ك ١٢	ك ٢٢

حيث أن

ك ١١ : هو عدد مفردات العينة من المدخنين والذين أصيبوا بالمرض.

ك٢١ : هو عدد مفردات العينة من المدخنين والذين لم يصابوا بالمرض.

ك١٢ : هو عدد مفردات العينة من غير المدخنين الذين أصيبوا بالمرض.

ك٢٢ : هو عدد مفردات العينة من غير المدخنين الذين لم يصابوا بالمرض.

ويكون معامل الاقتران فى هذه الحالة :

$$\boxed{\text{أ} = \frac{(\text{ك}_{١١})(\text{ك}_{٢٢}) - (\text{ك}_{٢١})(\text{ك}_{١٢})}{(\text{ك}_{١١})(\text{ك}_{٢٢}) + (\text{ك}_{٢١})(\text{ك}_{١٢})}}$$

اختبار جوهرية معامل الاقتران :

(١) الفرض الأصلى أو فرض العدم : لا توجد علاقة جوهرية بين الظاهرتين.

(٢) الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية بين الظاهرتين.

(٣) مستوى المعنوية (α) = ٥%.

(٤) المقياس المناسب : توزيع (كا^{٢}).

$$\text{كا}^{٢\bullet} = \text{مجـ} \left(\frac{(\text{ك}-\text{ك}^{\wedge})^{٢}}{\text{ك}^{\wedge}} \right)$$

(٥) إجراء العمليات الحسابية :

(٦) القــــرار.

إذا كانت كا$^{٢\bullet}$ $\geq$ كا^{٢} النظرية بدرجات حرية (عدد الصفوف-١) (عدد الأعمدة - ١) وعند مستوى المعنوية المفترض كانت العلاقة جوهرية والعكس صحيح.

حيث أن : ك: التكرارات المشاهدة (الموجودة فى التمرين).

ك$^{\wedge}$: التكرارات المتوقعة.

$$= \frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{مجموع التكرارات الكلية}}$$

مثال (٧) :

لمعرفة ما إذا كان هناك علاقة بين تجربة نوع جديد مـــن أنــواع "الشــامبو والإقبال على شرائه، وزعت الشركة المنتجة عينات مجانية تستخدم لمرة واحدة فقـــط على عدد كبير جداً من عملاء محلات "السوبر ماركت" وبعد مرور (٥) أســـابيع تـــم اختيار عينة عشوائية من ٢٠٠ شخص من العملاء وقسمت تكراراتـــهم فــى جــدول الاقتران الآتى :

الشـــــراء

		أشترى	لم يشترى	المجموع
التجربة	جرب	٧٠	٥٠	١٢٠
	لم يجرب	٣٥	٤٥	٨٠
	المجموع	١٠٥	٩٥	= ٢٠٠

المطلوب : هل هناك علاقة جوهرية بين تجربة السلعة والإقبال على شرائها بمســـتوى معنوية (α) = ٥%.

الحل :

$ك_{١١}=٧٠$	$ك_{٢١}=٥٠$
$ك_{١٢}=٣٥$	$ك_{٢٢}=٤٥$

معامل الاقتران :

$$\boxed{أ = \frac{(ك_{١١})(ك_{٢٢}) - (ك_{٢١})(ك_{١٢})}{(ك_{١١})(ك_{٢٢}) + (ك_{٢١})(ك_{١٢})}}$$

$$= \frac{٧٠\times٤٥ - ٥٠\times٣٥}{٧٠\times٤٥ + ٥٠\times٣٥} = .٢٨٦$$

اختبار جوهرية معامل الاقتران :

(١) فرض العدم:لا توجد علاقة جوهرية بين تجربة السلعة والإقبال على شرائها.

(٢) الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية بين تجربة السلعة والإقبال على شرائها.

(٣) مستوى المعنوية (α) = ٥%.

(٤) المقياس المناسب : توزيع (كا^{٢}).

$$كا^{٢*} = مجـ \left(\frac{(ك - \hat{ك})^{٢}}{\hat{ك}}\right)$$

(د) العمليات الحسابية :

$$\hat{ك} = \frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{مجموع التكرارات الكلية}}$$

$$\hat{ك}_{11} = \frac{١٢٠ \times ١٠٥}{٢٠٠} = ٦٣$$

$$\hat{ك}_{21} = \frac{١٢٠ \times ٩٥}{٢٠٠} = ٥٧$$

$$\hat{ك}_{12} = \frac{٨٠ \times ١٠٥}{٢٠٠} = ٤٢$$

$$\hat{ك}_{22} = \frac{٨٠ \times ٩٥}{٢٠٠} = ٣٨$$

ك	$\hat{ك}$	ك - $\hat{ك}$	$(ك-\hat{ك})^2$	$\frac{(ك-\hat{ك})^2}{\hat{ك}}$
٧٠	٦٣	٧	٤٩	,٧٧٨
٥٠	٥٧	-٧	٤٩	,٨٦٠
٣٥	٤٢	-٧	٤٩	١,١٦٧
٤٥	٣٨	٧	٤٩	١,٢٨٩
٢٠٠	٢٠٠	صفر		٤,٠٩٤

$كا^{2}_{\cdot}$

٦- القرار :

حيث أن ($كا^2$) النظرية بدرجات حرية (١) × (١) = (١) عند مستوى معنوية (α) = (٥%) = ٣,٨٤.

وحيث أن $كا^{2}_{\cdot}$ > $كا^2$ النظرية.

∴ العلاقة جوهرية بمستوى معنوية (α) = ٥%

٥- معامل التوافق

Coefficient of Contingency

إذا كانت أحد الظاهرتين (المتغيرين) المراد معرفة قوة العلاقة بينهما أو كلاهما مقسم إلى أكثر من خاصتين، ففى هذه الحالة يستخدم معامل التوافق.

مثال ذلك دراسة العلاقة بين الاتجاه السياسى والموافقة على قرار معين فإنه يمكن تقسيم الاتجاه السياسى إلى حزب وطنى، حزب الوفد، مستقلين والموافقة على قرار معين إلى موافق وغير موافق وفى هذه الحالة يمكن قياس معامل التوافق بالعلاقة الآتية :

$$\boxed{\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{\text{ق} - ١}{\text{ق}}}}$$

مثال (٨) :

عند التصويت على مشروع الموازنة العامة للدولة فى مجلس الشعب تم اختيار عينة عشوائية من ١٠٠ عضو وقسموا حسب انتمازهم الحزبى والموافقة أو عدم الموافقة على مشروع الموازنة ووضعوا البيانات فى الجدول الآتى :

	حزب وطنى	حزب الوفد	مستقلين	مجـ
موافين	٧٠	٥	١	٧٦
غير موافق	١٠	١٠	٤	٢٤
مجـ	٨٠	١٥	٥	١٠ =

والمطلوب : معرفة ما إذا كان هناك علاقة جوهرية بين الموافقة على القرار والانتماء إلى الحزب الوطنى بمستوى معنوية (α) = ٥%.

الحـل :

$$\text{مجموع الصف الأول :} \quad \frac{(٧٠)^٢}{٨٠\times٧٦} + \frac{(٥)^٢}{١٥\times٧٦} + \frac{(١)^٢}{٥\times٧٦} = ,٨٣٠٥$$

$$\text{مجموع للصف الثانى :} \quad \frac{(١٠)^٢}{٨٠\times٢٤} + \frac{(١٠)^٢}{١٥\times٢٤} + \frac{(٤)^٢}{٥\times٢٤} = ,٤٦٣٢$$

$$\text{ق} = ١,٢٩٣٧$$

$$\boxed{\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{\text{ق} - ١}{\text{ق}}}} = \sqrt{\frac{١,٢٩٣٧-١}{١,٢٩٣٧}} = ,٤٧٦$$

لاختبار جوهرية معامل التوافق :

$$\hat{\text{ك}} = \frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{مجموع التكرارات الكلية}}$$

$$\hat{\text{ك}}_{١١} = \frac{٨٠\times٧٦}{١٠٠} = ٦٠,٨$$

$$\hat{\text{ك}}_{٢١} = \frac{١٥\times٧٦}{١٠٠} = ١١,٤$$

$$\hat{\text{ك}}_{٣١} = \frac{٥\times٧٦}{١٠٠} = ٣,٨$$

$$\hat{\text{ك}}_{١٢} = \frac{٨٠\times٢٤}{١٠٠} = ١٩,٢$$

$$\hat{\text{ك}}_{٢٢} = \frac{١٥\times٢٤}{١٠٠} = ٣,٦$$

$$\hat{\text{ك}}_{٣٢} = \frac{٥\times٢٤}{١٠٠} = ١,٢$$

مجـ = ١٠٠

خطوات الاختبار :

(١) فرض العدم : لا توجد علاقة جوهرية بين الموافقة والانتماء للحزب الوطني.

(٢) الفرض البديل : توجد علاقة جوهرية بين الموافقة والانتماء للحزب الوطني.

(٣) مستوى المعنوية (α) = ٥%.

(٤) المقياس المناسب : توزيع (كا^{٢}).

$$كا^{٢*} = مجـ \left(\frac{(ك-ك^{\wedge})^{٢}}{ك^{\wedge}} \right)$$

$\frac{(ك-ك^{\wedge})^{٢}}{ك^{\wedge}}$	$(ك-ك^{\wedge})^{٢}$	ك - ك$^{\wedge}$	ك$^{\wedge}$	ك
١,٣٩٢	٨٤,٤٦	٩,٢	٦٠,٨	٧٠
٣,٥٩٣	٤٠,٩٦	٦,٤-	١١,٤	٥
٢,٠٦٣	٧,٨٤	٢,٨-	٣,٨	١
٤,٤٠٨	٨٤,٦٤	٩,٢-	١٩,٢	١٠
١١,٣٧٨	٤٠,٩٦	٦,٤	٣,٦	١٠
٦,٥٣٣	٧,٨٤	٢,٨	١,٢	٤
٢٩,٣٦٧		صفر	١٠٠	١٠٠

كا^{٢*}

٦- **القرار :**

حيث أن (كا^{٢}) النظرية بدرجات حرية (١) × (٣) = (٢) عند مستوى معنوية (α) = (٥%) = ٥,٩٩.

وحيث أن كا^{٢*} > كا^{٢} النظرية.

∴ العلاقة بين الموافقة والانتماء إلى الحزب الوطني جوهرية بمستوى معنوية (α) = ٥%

٦- معامل الارتباط المتعدد

Multiple Correlation Coefficient

يقيس معامل الارتباط المتعدد قوة واتجاه العلاقة بين المتغير التابع (ص) من ناحية ومتغيرين مفسرين (س١، س٢) على الأقل من ناحية أخرى.

و يمكن إيجاد معامل الإرتباط المتعدد من معاملات الإرتباط البسيطة كالآتي:-

$$\text{ر}_{\text{ص. س}_1\text{س}_2} = \sqrt{\frac{\text{ر}^2_{\text{ص س}_1} + \text{ر}^2_{\text{ص س}_2} - \text{ر}_{\text{ص س}_1}\ \text{ر}_{\text{ص س}_2}\ \text{ر}_{\text{س}_1\text{س}_2}}{1 - \text{ر}^2_{\text{س}_1\text{س}_2}}}$$

حيث :

$\text{ر}_{\text{ص س}_1}$: معامل الأرتباط البسيط بين ص ، س_1

$$= \frac{\text{مجـ}(\text{س}_1 - \bar{\text{س}}_1)(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}(\text{س}_1 - \bar{\text{س}}_1)^2}\ \sqrt{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}}$$

$\text{ر}_{\text{ص س}_2}$: معامل الأرتباط البسيط بين (ص) ، (س_2)

$$= \frac{\text{مجـ}(\text{س}_2-\bar{\text{س}}_2)(\text{ص}-\bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}(\text{س}_2-\bar{\text{س}}_2)^2}\;\sqrt{\text{مجـ}(\text{ص}-\bar{\text{ص}})^2}}$$

$\text{ر}_{\text{س}_1\text{س}_2}$: معامل الأرتباط البسيط بين (س_1) ، (س_2)

$$= \frac{\text{مجـ}(\text{س}_1-\bar{\text{س}}_1)(\text{س}_2-\bar{\text{س}}_2)}{\sqrt{\text{مجـ}(\text{س}_1\bar{\text{س}}_1)^2}\;\sqrt{\text{مجـ}(\text{س}_2-\bar{\text{س}}_2)^2}}$$

<u>إختبار جوهرية معامل الإرتباط المتعدد :</u>

نوجد أولاً :

- التغير الكلي (م.م.ك) = $\text{مجـ}(\text{ص}-\bar{\text{ص}})^2$
- التغير المفسر (م.م.ر) = $\text{ر}^2 \times (\text{ص}-\bar{\text{ص}})^2$
- البواقي (م.م.ي) = م.م.ك - م.م.ر .

الإختبار :

١- الفرض الأصلى أ. : ر ص.س١س٢ = صفراً

٢- الفرض البديل أ١ : ر ص.س١س٢ ≠ صفراً

٣- مستوى المعنوية α : ٥٪

٤- المقياس الإحصائى المناسب : توزيع (ف).

٥- جدول تحليل التباين :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات التباين	ف*
المفسر	م.م.ر	٢	م.م.ر / ٢	
البواقى	م.م.ى	ن - ك	م.م.ى / (ن - ك)	= (م.م.ر/٢) / (م.م.ى (ن - ك))
الكلى	م.م.ك	ن - ١		

٦- القرار :

إذا كانت قيمة (ف*) > (ف) النظرية عند مستوى (α = ٥٪) وبدرجات حرية (ك-١) ، (ن-ك).

يتم رفض الفرض الأصلى وقبول الفرض البديل أى أن معامل الإرتباط المتعدد جوهرياً إحصائياً والعكس صحيح.

مثال عام :

الآتي يمثل كل من حـجم المبيعـات بـالمليون جنيه لأحـد أصناف الشـاي وحجم المنصرف على الإعـلان بالمليون جنيه وعدد منافذ التـوزيع خلال ثماني سنوات في الفتره من سنه ١٩٨٨ إلى سنه ١٩٩٥..

السنه	حجم المبيعات بالمليون جنيه مصري	مقدار المنصر على الاعلانات بالمليون جنيه مصري	عدد منافذ التوزيع
١٩٨٨	٧	٤	٥
١٩٨٩	٩	٣	١٠
١٩٩٠	١١	٤	١٢
١٩٩١	١٥	٩	١٥
١٩٩٢	١٢	٥	١٥
١٩٩٣	١١	٣	١٨
١٩٩٤	١٦	٨	٢٠
١٩٩٥	١٥	٥	٢٣

والمطلوب :

١- تقدير معاملات الارتباط البسيطة:

$$ر_{ص س_١} ، ر_{ص س_٢} ، ر_{س_١ س_٢}$$

٢- تقدير معامل الارتباط المتعدد من معاملات الارتباط البسيطة.

٣- اختبار جوهرية معامل الارتباط المتعدد عند مستوى معنوية (α) = ٥%

الحل :

يمكن وضع البيانات السابقة فى الجدول الآتى :

ص	س١	س٢	ص س١	ص س٢	س١ س٢	ص٢	س١٢	س٢٢
٧	٤	٥	٢٨	٣٥	٢٠	٤٩	١٦	٢٥
٩	٣	١٠	٢٧	٩٠	٣٠	٨١	٩	١٠٠
١١	٤	١٢	٤٤	١٣٢	٤٨	١٢١	١٦	١٤٤
١٥	٩	١٥	١٣٥	٢٢٥	١٣٥	٢٢٥	٨١	٢٢٥
١٢	٥	١٥	٦٠	١٨٠	٧٥	١٤٤	٢٥	٢٢٥
١١	٣	١٨	٣٣	١٩٨	٥٤	١٢١	٩	٣٢٤
١٦	٨	٢٠	١٢٨	٣٢٠	١٦٠	٢٥٦	٦٤	٤٠٠
١٥	٥	٢٣	٧٥	٣٤٥	١١٥	٢٢٥	٢٥	٥٢٩
٩٦	٤١	١١٨	٥٣٠	١٥٢٥	٦٣٧	١٢٢٢	٢٤٥	١٩٧٢

ويمكن إيجاد المجاميع السته الآتيه :-

١- $\text{مجـ}(س_1 - \bar{س}_1)(ص - \bar{ص}) = \text{مجـ}\ س_1ص - \dfrac{\text{مجـ}\ س_1\ \text{مجـ}\ ص}{ن}$

$$= ٥٣٠ - \frac{٤١ \times ٩٦}{٨} = ٣٨$$

٢- $\text{مجـ}(س_2 - \bar{س}_2)(ص - \bar{ص}) = \text{مجـ}\ س_2ص - \dfrac{\text{مجـ}\ س_2\ \text{مجـ}\ ص}{ن}$

$$= ١٥٢٥ - \frac{١٨ \times ٩٦}{٨} = ١٠٩$$

$$\text{٣- مجـ}\,(س_١-\bar{س}_١)^٢ = \text{مجـ}\,س_١^٢ - \frac{(\text{مجـ}\,س_١)^٢}{ن}$$

$$= ٢٤٥ - \frac{(٤١)^٢}{٨} = ٣٤٫٨٧٥$$

$$\text{٤- مجـ}\,(س_٢-\bar{س}_٢)^٢ = \text{مجـ}\,س_٢^٢ - \frac{(\text{مجـ}\,س_٢)^٢}{ن}$$

$$= ١٩٧٢ - \frac{(١١٨)^٢}{٨} = ٢٣١٫٥$$

$$\text{٥- مجـ}\,(س_١-\bar{س}_١)\,(س_٢-\bar{س}_٢) = \text{مجـ}\,س_١\,س_٢ - \frac{\text{مجـ}\,س_١\ \text{مجـ}\,س_٢}{ن}$$

$$= ٦٣٧ - \frac{١١٨ \times ٤١}{٨} = ٣٢٫٢٥$$

$$\text{٦- مجـ}\,(ص-\bar{ص})^٢ = \text{مجـ}\,ص^٢ - \frac{(\text{مجـ}\,ص)^٢}{ن}$$

$$= ١٢٢٢ - \frac{(٩٦)^٢}{٨} = ٧٠$$

أولاً : إيجاد معاملات الإتباط البسيطه :

$$(١) \quad ر_{\text{ص س}_1} = \frac{\text{مجـ}\ (\text{س}_1 - \bar{\text{س}}_1)\ (\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}\ (\text{س}_1 - \bar{\text{س}}_1)^2}\ \sqrt{\text{مجـ}\ (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}}$$

$$= \frac{\text{٢٨}}{\sqrt{\text{٣٤٫٨٧٥}}\ \sqrt{\text{٧٠}}} = \text{٧٦٩١ر}$$

$$(٢) \quad ر_{\text{ص س}_2} = \frac{\text{مجـ}\ (\text{س}_2 - \bar{\text{س}}_2)\ (\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}\ (\text{س}_2 - \bar{\text{س}}_2)^2}\ \sqrt{\text{مجـ}\ (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}}$$

$$= \frac{\text{١٠٩}}{\sqrt{\text{٢٣١٫٥}}\ \sqrt{\text{٧٠}}} = \text{٨٥٦٣ر}$$

$$(٣) \quad ر_{\text{س}_1\ \text{س}_2} = \frac{\text{مجـ}\ (\text{س}_1 - \bar{\text{س}}_1)\ (\text{س}_2 - \bar{\text{س}}_2)}{\sqrt{\text{مجـ}\ (\text{س}_1 - \bar{\text{س}}_1)^2}\ \sqrt{\text{مجـ}\ (\text{س}_2 - \bar{\text{س}}_2)^2}}$$

$$= \frac{\text{٣٢٫٢٥}}{\sqrt{\text{٣٤٫٨٧٥}}\ \sqrt{\text{٣١٫٥}}} = \text{٣٥٨١ر}$$

ثانيًا : إيجاد معامل الإرتباط المتعدد من معاملات الإرتباط البسيطه:-

$$ر_{ص.س_1س_2} = \sqrt{\frac{ر^2_{ص س_1} + ر^2_{ص س_2} - 2 ر_{ص س_1} ر_{ص س_2} ر_{س_1 س_2}}{1 - ر^2_{س_1 س_2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(٧٦٩١ر)^2 + (٨٥٦٣ر)^2 - ٢ \times ٧٦٩١ر \times ٨٥٦٣ر \times ٣٥٨٩ر}{١ - (٧٦٩١ر)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{٨٥١٩٤٥ر}{٨٧١١٧٧ر}} = \sqrt{٩٧٧٩٢ر} = ٩٨٨٩ر$$

ثالثًا : إختبار معامل الإرتباط المتعدد:-

يعتمد هذا الاختبار أساسًا على توزيع (ف) وجدول تحليل التباين :

حيث أن :

- $\boxed{\text{التغير الكلي م.م.ك} = \text{مجـ}(ص - \bar{ص})^2}$

= ٧٠

- $\boxed{\text{التغير المفسر م.م.ر} = \text{مجـ}(ص - \bar{ص})^2 \times ر^2_{ص.س_1س_2}}$

= ٧٠ × ٩٧٧٩٢ر

= ٦٨ر٤٥٤

- التغير العشوائي أو البواقي م.م.ي = ٧٠ - ٦٨ر٤٥٤
= ١ر٥٤٦

ويتم الإختبارات كالأتي:

١- الفرض الأصلي أ. : ر ص. س١ س٢ = صفراً

٢- الفرض البديل أ١ : ر ص. س١ س٢ ≠ صفراً.

٣- مستوى المعنويه α : ٥٪ .

٤- المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ف).

٥- جدول تحليل التباين :

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحريه	متوسط المربعات التباين	ف*
المفسر	٦٨ر٤٥٤	٢	٦٨ر٤٥٤ ÷٢ = ٣٤ر٢٢٧	
البواقي	١ر٥٤٦	٥	١ر٥٤٦ ÷٥ =٣٠٩ر	٣٤ر٢٢٧ ÷ ٣٠٩ر = ١١٠ر٧٢
الكلي	٧٠	ن-١=٧		

٦ القرار :

حيث أن قيمة (ف*) > (ف) النظرية .

يتم رفض الفرض الأصلي وقبول الفرض البديل بمستوى معنويه (α = ٥٪).

إي أن معامل الأرتباط المتعدد معنويًا إحصائيًا

٧- معاملات الأرتباط الجزئية
Partial Correlation Coefficient

يقيس معامل الارتباط المتعدد والجزئي $ر_{ص س_١ . س_٢}$ قوة واتجاه العلاقة بين المتغير التابع (ص) و المتغير المفسر ($س_١$) مع استبعاد تأثير المتغير المستقل ($س_٢$)، وبالمثل فإن معامل الإرتباط الجزئي $ر_{ص س_٢ . س_١}$ يقيس قوة واتجاه العلاقة بين (ص، $س_٢$) مع استبعاد وتأثير ($س_١$):

ويمكن إيجاد معاملات الإرتباط الجزئية مع العلاقات الآتيه :-

$$ر_{ص س_١ . س_٢} = \frac{ر_{ص س_١} - ر_{ص س_٢} \; ر_{س_٢ س_١}}{\sqrt{١ - ر^٢_{ص س_٢}} \sqrt{١ - ر^٢_{س_١ س_٢}}} \qquad (٦:١)$$

$$ر_{ص س_٢ . س_١} = \frac{ر_{ص س_٢} - ر_{ص س_١} \; ر_{س_١ س_٢}}{\sqrt{١ - ر^٢_{ص س_١}} \sqrt{١ - ر^٢_{س_٢ س_١}}} \qquad (٦:٢)$$

وسوف يتم دراسة ثلاثة أشياء في هذا الجزء هي:

١- إيجاد معامل الإرتباط الجزئي.

٢- إختبار معنوية معامل الإرتباط الجزئي.

٣- إيجاد معامل التحديد الجزئي.

في المثال السابق حيث كانت معاملات الإرتباط البسيطه هي :-

$ر_{ص س_1} = ٧٦٩١ر$ $\quad$ $ر_{ص س_2} = ٦٥٨٣ر$ $\quad$ $ر_{س_1 س_2} = ٣٥٨٩ر$ $\quad$ ن = ٨

المطلوب :

أولاً أوجد معاملات الإرتباط الجزئية :-

$ر_{ص س_1 . س_2}$ ، $ر_{ص س_2 . س_1}$ ، وفسر معناها.

ثانيًا: إختبر معنوية معامل الإتباط الجزئي $ر_{ص س_1 . س_2}$ إذا علمت إن ت النظرية بدرجات حريه (٥) وعند مستوى معنوية(α : ٥٪)= ٢٫٥٧١.

ثالثًا: أوجد معامل التحديد الجزئي $ر^2_{ص س_1 . س_2}$ وفسر معناه.

أولاً: معاملات الإرتباط الجزئية :

١- معامل الإرتباط الجزئي بين (ص،س١) مع استبعاد تأثير (س٢)

$$ر_{ص س_2 . س_1} = \frac{ر_{ص س_1} - ر_{ص س_2} \; ر_{س_1 س_2}}{\sqrt{1 - ر^2_{ص س_2}} \sqrt{1 - ر^2_{ص س_1}}}$$

$$= \frac{٧٦٩١ر - ٨٥٦٣ر \times ٣٥٨٩ر}{\sqrt{1 - (٨٥٦٣ر)^2} \sqrt{1 - (٣٥٨٩ر)^2}}$$

$$= \frac{\text{٤٦١٧٧ر}}{\sqrt{\text{٢٣٢٤٦ر}}}$$

$$= \frac{\text{٤٦١٧٧ر}}{\text{٤٨٢١٤ر}} = \text{٩٥٧٧٥ر}$$

٢- معامل الإرتباط الجزئي بين (ص، س٢) مع استبعاد تأثير (س١)

$$\text{ر}_{\text{ص س٢ . س١}} = \frac{\text{ر}_{\text{ص س٢}} - \text{ر}_{\text{ص س١}} \; \text{ر}_{\text{س١ س٢}}}{\sqrt{1 - \text{ر}^{2}_{\text{ص س١}}} \; \sqrt{1 - \text{ر}^{2}_{\text{س٢ س١}}}}$$

$$= \frac{\text{٨٥٦٣} - \text{٧٦٩١ر} \times \text{٣٥٨٩ر}}{\sqrt{1 - (\text{٧٦٩١ر})^{2}} \; \sqrt{1 - (\text{٣٥٨٩ر})^{2}}}$$

$$= \frac{\text{٥٨٠٢ر}}{\sqrt{\text{٣٥٥٨٨ر}}}$$

$$= \frac{\text{٥٨٠٢ر}}{\text{٥٩٦٥٥ر}}$$

$$= \text{٩٧٢٦ر}$$

ثانياً: إختبار معنوية معامل الارتباط الجزئي $r_{\text{ص س}_1 . \text{س}_2}$

١- الفرض الأصلي H_0 : $r_{\text{ص س}_1 . \text{س}_2}$ = صفراً.

٢- الفرض البديل H_1 : $r_{\text{ص س}_1 . \text{س}_2} \neq$ صفراً.

٣- مستوى المعنويه α : ٥٪.

٤- المقياس الإحصائي المناسب : توزيع (ت).

$$\boxed{\text{ت}^* = \frac{r_{\text{ص س}_1 . \text{س}_2} \sqrt{\text{ن} - ٣}}{\sqrt{١ - r^2_{\text{ص س}_1 . \text{س}_2}}}}$$

د- العمليات الحسابية :

$$\text{ت}^* = \frac{٩٥٧٧٥ر \sqrt{٨ - ٣}}{\sqrt{١ - (٩٥٧٧٥ر)^2}}$$

$$\text{ت} = \frac{٩٥٧٧٥ر \times ٢ر٢٣٦٠٦٨}{\sqrt{١ - (٩٥٧٧٥ر)^2}}$$

$$= \frac{٢ر١٤١٥٨}{٢٨٧٦٢ر}$$

$$= ٧ر٤٤٦$$

٦ القرار :

حيث أن قيمة (ت*) > (ت) النظرية .

يتم رفض الفرض الأصلي وقبول الفرض البديل بمستوى معنوية (α = ٥ ٪).

إي أن معامل الإرتباط الجزئي معنويًا إحصائيًا .

ثالثًا : إيجاد معامل التحديد الجزئي. $ر^{٢}_{ص س_{١} . س_{٢}}$

$$ر^{٢}_{ص س_{١} . س_{٢}} = (٩٥٧٧٥ر)^{٢}$$

$$= ٩١٧٣ر$$

معنى معامل التحديد الجزئي :

إن (٧٧٧٥ر٩٥ ٪) من التغيرات التي تحدث في قيمة المبيعات (ص) ترجع إلى التغير في المنصرف على الإعلان ($س_{١}$) مع ثبات تأثير عدد منافذ التوزيع($س_{٢}$) على قيمة المبيعات.

* * * * *

الباب السادس

الأرقام القياسية

Index Numbers

الرقم القياسى هو نسبة مئوية عبر عن التغير فى الأسعار prices أو الكميات Quantities أو القيم values لسلع معينة فى فترة معينة تسمى فترة المقارنة Compared period مع فترة أخرى وتسمى فرة الأساس base period.

الرموز المستخدمة :

السعر (ع)p ، الكمية (ك) q ، القيمة (ع ك) pq سنة الأساس (صفر) zero سنة المقارنة (١) 1 أى أن سعر سنة الأساس (ع.) p_0، سعر سنة المقارنة (ع١) p_1 ، كمية سنة الأساس (ك.) q_0 ، كمية سنة المقارنة (ك١) q_1 وقيمة سنة الأساس (ع.ك.) p_0q_0 ، وقيمة سنة المقارنة (ع١ك١) p_1q_1 ، والرقم القياسى يساوى ١٠٠٪ ويعتبر الأكثر من هذا زيادة والأقل من ذلك يعتبر نقص.

أنواع الأرقام القياسية Types of index numbers

يوجد أرقام قياسية للأسعار وللكميات وللقيمة.

أولاً : الأرقام القياسية للأسعار Price index numbers

(١) منسوب السعر (س) Simple price relative (P.R)

$$= \frac{ع_1}{ع_.} \times ١٠٠$$ ويحسب لكل سلعة على حدة for each item.

(٢) الرقم القياسى التجمعى البسيط للأسعار Composite aggregative price

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}} \times ١٠٠$$

(٣) الرقم القياسى التجمعى للأسعار مرجحاً بكميات الأساس ($\text{ك}_{٠}$) [رقم لاسبير]

weighted aggregative price using the base period quantities (laspeyes' price)

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\,\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\,\text{ك}_{٠}} \times ١٠٠$$

(٤) الرقم القياسى التجمعى للأسعار مرجحاً بكميات المقارنة (ك١) [رقم باش]

weighted aggregtive price using the compared period quantities (Paashe's price)

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\,\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}} \times ١٠٠$$

(٥) الرقم القياسى التجمعى الأمثل للأسعار [رقم فيشر للأسعار] Fisher

$$= \sqrt{\text{رقم لاسبير للأسعار} \times \text{رقم باش للأسعار}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{١}\,\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\,\text{ك}_{٠}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{١}\,\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}}} \times ١٠٠$$

(٦) الرقم القياسى التجميعى للأسعار مرجحاً بالوسط الحسابى لكميات سنتى الأساس والمقارنة [رقم ادجيورث] Edgeworth

$$= \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ (ك + ك}_1\text{)}}{\text{مجـ ع (ك + ك}_1\text{)}} \times ١٠٠$$

وهناك أرقام قياسية أخرى للأسعار أقل انتشاراً واستخداماً مثل:

- الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار $= \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$ حيث س هى منسوب السعر

- الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار $= \frac{\text{مجـ لو س}}{\text{ن}}$

ثم ايجاد العدد المقابل inv or shift ثم log

- الرقم القياسى التجمعى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى لرقمى لاسبير وباش

$$= \frac{\text{رقم لاسبير + رقم باش}}{٢} \times ١٠٠$$

- الرقم القياسى التجمعى للأسعار مرجحاً بالوسط الهندسى لكميتى الأساس والمقارنة $= \frac{\text{مجـ ع}_1 \sqrt{\text{ك ك}_1}}{\text{مجـ ع} \sqrt{\text{ك ك}_1}} \times ١٠٠$

- الرقم القياسى التجميعى للأسعار مرجحاً باستخدام كميات ثابتة

$$= \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ك}_\text{ث}}{\text{مجـ ع}_. \text{ك}_\text{ث}} \times ١٠٠$$

حيث $\text{ك}_\text{ث}$ هى أوزان ثابتة للكميات (معطاه).

- الوسط الحسابى لمناسيب الأسعا مرجحاً بقيم الأساس (ع. ك.)

$$= \frac{\text{مجـ س ع}_{٠}\text{ ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{٠}} \times ١٠٠$$

حيث (س) = $\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٠}} \times ١٠٠$ وتحسب لكل سلعة على حدة

وهو يعادل رقم لاسبير للأسعار

• الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بقيم المقارنة ($\text{ع}_{١}\text{ ك}_{١}$)

$$= \frac{\text{مجـ س ع}_{١}\text{ ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{١}} \times ١٠٠$$

حيث (س) = $\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٠}} \times ١٠٠$ وتحسب لكل سلعة على حدة

• الوسط الحسابى لمناسب الأسعار مرجحاً بقيم $\text{ع}_{٠}\text{ ك}_{١}$

$$= \frac{\text{مجـ س ع}_{٠}\text{ ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{١}} \times ١٠٠$$

حيث (س) = $\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٠}} \times ١٠٠$ وتحسب لكل سلعة على حدة

وهو يعادل رقم باش للأسعار

• الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بقيم $ع_١ك_٠$.

$$= \frac{مجـ س ع_١ ك_٠}{مجـ ع_١ ك_٠} \times ١٠٠$$

حيث (س) = $\frac{ع_١}{ع_٠} \times ١٠٠$ وتحسب لكل سلعة على حدة

ثانياً : الأرقام القياسية للكميات Quantity index numbers

نفس الأرقام القياسية للأسعار مع تغيير السعر (ع) إلى الكمية (ك) والكمية (ك) إلى السعر (ع).

(١) منسوب الكمية (ك) Simple quantity relative (Q.R)

$$= \frac{ك_١}{ك_٠} \times ١٠٠$$

ويحسب لكل سلعة على حدة for each item

(٢) الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات

Composite aggregative quantity

$$= \frac{مجـ ك_١}{مجـ ك_٠} \times ١٠٠$$

(٣) الرقم القياسى التجميعى للكميات مرجحاً بأسعار الأساس ($ك_٠$) [رقم لاسبير]

weighted aggregative quantity using the base period price [laspeyre's quantity]

$$= \frac{مجـ ك_١ ع_٠}{مجـ ك_٠ ع_٠} \times ١٠٠$$

(٤) الرقم القياسى التجميعى للكميات مرجحاً بأسعار الأساس ($ك_١$) [رقم باش]

weighted aggregative quantity using the compared period price [paasche's quantity]

$$= \frac{\text{مجـ } ك_١ ع_١}{\text{مجـ } ك_. ع_١} \times ١٠٠$$

(٥) الرقم القياسى التجميعى الأمثل للكميات [رقم فيشر للكميات] Fisher

$$= \sqrt{\text{رقم لاسبير للكميات} \times \text{رقم باش للأسعار}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ } ك_١ ع_.}{\text{مجـ } ك_. ع_.} \times \frac{\text{مجـ } ك_١ ع_١}{\text{مجـ } ك_. ع_١}} \times ١٠٠$$

(٦) الرقم القياسى التجميعى للكميات مرجحاً بالوسط الحسابى لأسعار سنتى الأساس والمقارنة [رقم ادجيورث] edgeworth

$$= \frac{\text{مجـ } ك_١ (ع_. + ع_١)}{\text{مجـ } ك_. (ع_. + ع_١)} \times ١٠٠$$

وهناك أرقام قياسية أخرى للكميات أقل انتشاراً واستخداماً مثل:

• الوسط الحسابى لمناسيب الكميات = $\frac{\text{مجـ } ك}{ن}$ حيث ك هى منسوب الكمية

الوسط الهندسى لمناسيب الكميات = $\frac{\text{مجـ لو } ك}{ن}$

ثم ايجاد العدد المقابل Inv shift or ثم log

• الرقم القياسى التجميعى للكميات باستخدام الوسط الحسابى لرقمى لاسبير وباش

$$= \frac{\text{رقم لاسبير + رقم باش}}{٢} \times ١٠٠$$

• الرقم القياسى التجميعى للكميات مرجحاً بالوسط الهندسى لكمى الأساس والمقارنة

$$\text{والمقارنة} = \frac{\text{مجـ ك}_{1} \sqrt{\text{ع}_{0}\,\text{ع}_{1}}}{\text{مجـ ك}_{0} \sqrt{\text{ع}_{0}\,\text{ع}_{1}}} \times ١٠٠$$

• الرقم القياسى التجميعى للكميات مرجحاً باستخدام أسعار ثابتة

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{1}\,\text{ع}_{\text{ث}}}{\text{مجـ ك}_{0}\,\text{ع}_{\text{ث}}} \times ١٠٠$$

حيث $\text{ع}_{\text{ث}}$ أوزان ثابتة للأسعار (معطاه).

• الوسط الحسابى لمناسيب الكميات مرجحاً بقيم الأساس ($\text{ع}_{0}\,\text{ك}_{0}$)

$$= \frac{\text{مجـ ك ع}_{0}\,\text{ك}_{0}}{\text{مجـ ع}_{0}\,\text{ك}_{0}} \times ١٠٠$$

حيث (ك) $= \frac{\text{ك}_{1}}{\text{ك}_{0}} \times ١٠٠$ وتحسب لكل سلعة على حدة

وهو يعادل رقم لاسبير للكميات

• الوسط الحسابى لمناسيب الكميات مرجحاً بقيم المقارنة ($\text{ع}_{1}\text{ك}_{1}$)

$$= \frac{\text{مجـ ك ع}_{1}\,\text{ك}_{1}}{\text{مجـ ع}_{1}\,\text{ك}_{1}} \times ١٠٠$$

حيث (ك) = $\frac{\text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٠}} \times ١٠٠$ وتحسب لكل سلعة على حدة

• الوسط الحسابى لمناسيب الكميات مرجحاً بالقيم ($\text{ع}_{٠}\ \text{ك}_{١}$)

$$= \frac{\text{مجـ ك ع}_{٠}\ \text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{ك}_{١}} \times ١٠٠$$

حيث (ك) = $\frac{\text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٠}} \times ١٠٠$ وتحسب لكل سلعة على حدة —

• الوسط الحسابى لمناسيب الكميا مرجحاً بالقيم ($\text{ع}_{١}\ \text{ك}_{٠}$)

$$= \frac{\text{مجـ ك ع}_{١}\ \text{ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{ك}_{٠}} \times ١٠٠$$

حيث (ك) = $\frac{\text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٠}} \times ١٠٠$ وتحسب لكل سلعة على حدة

وهو يعادل رقم باش للكميات

ثالثاً : الأرقام القياسية للقيمة Value index numbers

(١) منسوب القيمة (ق). Simple value relative (V.R)

$$= \frac{\text{ع}_{١}\ \text{ك}_{١}}{\text{ع}_{٠}\ \text{ك}_{٠}} \times ١٠٠$$

ويحسب لكل سلعة على حدة for each item

السلع	ع.	ك.	ع١	ك١	ع١ك.	ع.ك.	ع١ك١	ع.ك١	ك.+ك١	ع١(ك.+ك١)	ع.(ك.+ك١)
أ	٢٠	١٥٠	٣٦	٢٠٠	٥٤٠٠	٣٠٠٠	٧٢٠٠	٤٠٠٠	٣٥٠	١٢٦٠٠	٧٠٠٠
ب	١٢	٢١٠	٢٥	٢٥٠	٥٢٥٠	٢٥٢٠	٦٢٥٠	٣٠٠٠	٤٦٠	١١٥٠٠	٥٥٢٠
جـ	١٦	٣٠٠	٢٠	٥٠٠	٦٠٠٠	٤٨٠٠	١٠٠٠٠	٨٠٠٠	٨٠٠	١٦٠٠٠	١٢٨٠٠
	٤٨	٦٦٠	٨١	٩٥٠	١٦٦٥٠	١٠٣٢٠	٢٣٤٥٠	١٥٠٠٠		٤٠١٠٠	٢٥٣٢٠

(١) الرقم التجميعى البسيط للأسعار $= \frac{\text{مجـ ع}_{1}}{\text{مجـ ع}_{0}} \times ١٠٠$

$$= \frac{٨١}{٤٨} \times ١٠٠ = ١٦٨,٧٥\%$$

(٢) الرقم القياسى للأسعار مرجحاً بكميات الأساس (لاسبير)

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{1}\ \text{ك}_{0}}{\text{مجـ ع}_{0}\ \text{ك}_{0}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٦٦٥٠}{١٠٣٢٠} \times ١٠٠ = ١٦١,٣٤\%$$

(٣) الرقم القياسى للأسعار مرجحاً بكميات المقارنة (باش)

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{1}\ \text{ك}_{1}}{\text{مجـ ع}_{0}\ \text{ك}_{1}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٣٤٥٠}{١٥٠٠٠} \times ١٠٠ = ١٥٦,٣٣\%$$

(٤) الرقم القياسى الأمثل (رقم فيشر للأسعار)

$$= \sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{1}\ \text{ك}_{0}}{\text{مجـ ع}_{0}\ \text{ك}_{0}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{1}\ \text{ك}_{1}}{\text{مجـ ع}_{0}\ \text{ك}_{1}}} \times ١٠٠$$

$$\sqrt{\frac{١٦٦٥٠}{١٠٣٢٠} \times \frac{٢٣٤٥٠}{١٥٠٠٠}} \times ١٠٠$$

$$\sqrt{١,٦١ \times ١,٥٦} \times ١٠٠ = ١٥٨,٤٨\%$$

(٥) الرقم القياس للقيمة = $\frac{مجـ ع_{١} ك_{١}}{مجـ ع ك} \times ١٠٠$

$$= \frac{٢٣٤٥٠}{١٠٣٢٠} \times ١٠٠ = ٢٢٧,٢\%$$

(٦) منسوب السعر لكل سلعة (س) = $\frac{ع_{١}}{ع} \times ١٠٠$

للسلعة (أ) = $\frac{٣٦}{٢٠} \times ١٠٠ = ١٨٠\%$

للسلعة (ب)= $\frac{٢٥}{١٢} \times ١٠٠ = ٢٠٨\%$

للسلعة (جـ) = $\frac{٢٠}{١٦} \times ١٠٠ = ١٢٥\%$

(٧) الرقم القياسى باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب = $\frac{مجـ س}{ن}$

$$= \frac{١٨٠ + ٢٠٨ + ١٢٥}{٣} = \frac{٥١٣}{٣} = ١٧١\%$$

(٨) الرقم التجميعى البسيط للكميات = $\frac{\text{مجـ ك}_1}{\text{مجـ ك}_0} \times ١٠٠$

$= \frac{٩٥٠}{٦٦٠} \times ١٠٠ = ١٤٣,٩٤\%$

(٩) الرقم القياسى للأسعار مرجحاً بالوسط الحسابى لكميتى الأساس والمقارنة

(ادجورث) = $\frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ (ك}_0 + \text{ك}_1\text{)}}{\text{مجـ ع}_0 \text{ (ك}_0 + \text{ك}_1\text{)}} \times ١٠٠$

$= \frac{٤٠١٠٠}{٢٥٣٢٠} \times ١٠٠$

$= ١٥٨,٣٧\%$

مثال (٢):

الجدول الآتى يوضح الأسعار بالجنيه والكميات بالآف الوحدات لأربعة أنواع من السلع أ ، ب ، حـ ، د عن عامى ٢٠٠١ ، ٢٠٠٦.

السلعة	٢٠٠١		٢٠٠٦	
	أسعار	كميات	أسعار	كميات
أ	٦	٣٠٠٠	٨	٢٤٠٠
ب	٧	٢٥٠٠	١٠	٢٨٠٠
جـ	١١	٤٠٠٠	١٥	٣٥٠٠
د	١٦	٤٠٠	٢٠	٣٠٠

المطلوب: حساب الأرقام القياسية الآية لسنة ٢٠٠٦ بالنسبة إلى سنة ٢٠٠١ كاساس باستخدام :

أولاً : الرقم التجميعى البسيط للأسعار.

ثانياً : رقم لاسبير القياسى للأسعار.

ثالثاً : رقم باش القياسى للأسعار.

رابعاً : رقم فيشر الأمثل.

خامساً : الرقم القياسى للقيمة.—

الحــــــل

السلعة	ع.	ك.	ع١	ك١	ع١ك.	ع.ك.	ع١ك١	ع.ك١
أ	٦	٣٠٠٠	٨	٢٤٠٠	٢٤٠٠٠	١٨٠٠٠	١٩٢٠٠	١٤٤٠٠
ب	٧	٢٥٠٠	١٠	٢٨٠٠	٢٥٠٠٠	١٧٥٠٠	٢٨٠٠٠	١٩٦٠٠
جـ	١١	٤٠٠٠	١٥	٣٥٠٠	٦٠٠٠٠	٤٤٠٠٠	٥٢٥٠٠	٣٨٥٠٠
د	١٦	٤٠٠	٢٠	٣٠٠	٨٠٠٠	٦٤٠٠	٦٠٠٠	٤٨٠٠
	٤٠		٥٣		١١٧٠٠٠	٨٥٩٠٠	١٠٥٧٠٠	٧٧٣٠٠

(١) الرقم التجميعى البسيط للأسعار = $\frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_.} \times ١٠٠$

$= \frac{٥٣}{٤٠} \times ١٠٠ = ١٣٢,٥٪$

(٢) رقم لاسبير (الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بكميات الاساس)

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{٠}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١١٧٠٠٠}{٨٥٩٠٠} \times ١٠٠ = ١٣٦,٢\ \%$$

(٣) رقم باش (الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بكميات المقارنة)

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{١}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٠٥٧٠٠}{٧٧٣٠٠} \times ١٠٠ = ١٣٦,٧٤\ \%$$

(٤) رقم فيشر $= \sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش}} \times ١٠٠$

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{٠}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{١}}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{\frac{١٣٦,٢}{١٠٠} \times \frac{١٣٦,٧٤}{١٠٠}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{١,٣٦٢ \times ١,٣٦٧٤} \times ١٠٠ = ١٣٦,٤٧\ \%$$

(٥) الرقم القياس للقيمة = $\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0} \times ١٠٠$

$= \frac{١٠٥٧٠٠}{٨٥٩٠٠} \times ١٠٠ = ١٢٣,٠٥٪$

مثال(٣)

السلعة	الاسعار بالجنيهات		الكميات بالالاف	
	٢٠٠٣	٢٠٠٧	٢٠٠٣	٢٠٠٧
أ	١٢	١٤	٣٢	٦٠
ب	٨	٩	٢٧	٤٢
جـ	١٠	١٥	٦٦	٧٢
د	٤	٦	١٤	٢٠

المطلوب: تكوين الارقام القياسية الآتية لسنة ٢٠٠٧ بالنسبة إلى سنة ٢٠٠٣ كأساس:

(١) الرقم التجميعى البسيط للأسعار.

(٢) الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار.

(٣) الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بكميا الأساس (لاسبير).

(٤) الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بكميات المقارنة (باش).

(٥)الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بالوسط الحسابى لكميات سنتى الأساس والمقارنة.

(٦) رقم فيشر الأمثل.

(٧) الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بالقيمة (ع. ك.).

(٨) الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بالقيمة (ع. $ك_١$).

(٩) الرقم التجميعى البسيط للكميات.

(١٠) الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الكميات.

(١١) الرقم التجميعى للكميات مرجحاً بأسعار الاساس (لاسبير) ك. .

(١٢) الرقم التجميعى للكميات مرجحاً بأسعار المقارنة (باش) $ك_١$.

(١٣) الوسط الحسابى لمناسيب الكميات مرجحاً بقيم (ع. ك.).

(١٤) الوسط الحسابى لمناسيب الكميات مرجحاً بقيم ($ع_١$ك.).

(١٥) الرقم القياسى للقيمة.

الحـــل

السلع	ع.	ع١	ك.	ك١	س ع١/ع. × ١٠٠	ع١ك.	ع.ك.	ع١ك١	ع.ك١
أ	١٢	١٤	٣٢	٦٠	١١٦,٦٧	٤٤٨	٣٨٤	٨٤٠	٧٢٠
ب	٨	٩	٢٧	٤٢	١١٢,٥	٢٤٣	٢١٦	٣٧٨	٣٣٦
جـ	١٠	١٥	٦٦	٧٢	١٥٠	٩٩٠	٦٦٠	١٠٨٠	٧٢٠
د	٤	٦	١٤	٢٠	١٥٠	٨٤	٥٦	١٢٠	٨٠
	٣٤	٤٤	١٣٩	١٩٤	٥٢٩,١٧	١٧٦٥	١٣١٦	٢٤١٨	١٨٥٦

السلع	ك.+ك١	ع١(ك.+ك١)	ع.(ك.+ك١)	س ع.ك.	س ع.ك١	ك $\frac{ك_1}{ك_.} \times ١٠٠$	ك ع. ك.	ك ع١ك.
أ	٩٢	١٢٨٨	١١٠٤	٤٤٨٠١,٢٨	٨٤٠٠٢,٤	١٨٧,٥	٧٢٠٠٠	٨٤٠٠٠
ب	٦٩	٦٢١	٥٥٢	٢٤٣٠٠	٣٧٨٠٠	١٥٥,٥٦	٣٣٦٠٠,٩٦	٣٧٨٠١,٠٨
جـ	١٣٨	٢٠٧٠	١٣٨٠	٩٩٠٠٠	١٠٨٠٠٠	١٠٩,٠٩	٧١٩٩٩,٤٠	١٠٧٩٩٩,١٠
د	٣٤	٢٠٤	١٣٦	٨٤٠٠	١٢٠٠٠	١٤٢,٨٦	٨٠٠٠,١٦	١٢٠٠٠,٢٤
		٤١٨٣	٣١٧٢	١٧٦٥٠١,٢٨	٢٤١٨٠٢,٤	٥٩٥,٠١	١٨٥٦٠٠,٥٢	٢٤١٨٠٠,٤٢

(١) الرقم التجميعى البسيط للأسعار = $\frac{\text{مجـ ع}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}} \times ١٠٠$

$$= \frac{٤٤}{٣٤} \times ١٠٠ = ١٢٩,٤١\%$$

(٢) الوسط الحسابى البسيط لمناسب الأسعار = $\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$

$$= \frac{٥٢٩,١٧}{٤} = ١٣٢,٢٩٣\%$$

(٣) الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بكميات سنة الاساس (لاسبير)

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{ك}_{٠}} \times ١٠٠ = \frac{١٧٦٥}{١٣١٦} \times ١٠٠ = ١٣٤,١١٨\%$$

(٤) الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بكميات سنة المقارنة (باش)

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{ك}_{١}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٤١٨}{١٨٥٦} \times ١٠٠ = ١٣٠,٢٨\%$$

(٥) الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بالوسط الحسابى لكميات سنتى الاساس والمقارنة

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\ (\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١})}{\text{مجـ ع}_{٠}\ (\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١})} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٤١٨٣}{٣١٧٢} \times ١٠٠ = ١٣١,٨٧٣٪$$

(٦) رقم فيشر الأمثل = $\sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش}} \times ١٠٠$

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_١ \text{ ك}_٠}{\text{مجـ ع}_٠ \text{ ك}_٠} \times \frac{\text{مجـ ع}_١ \text{ك}_١}{\text{مجـ ع}_٠ \text{ ك}_١}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{\frac{١٧٦٥}{١٣١٦} \times \frac{٢٤١٨}{١٨٥٦}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{١,٣٤١١٨ \times ١,٣٠٢٨} \times ١٠٠ = \sqrt{١,٧٤٧٢٨٩} \times ١٠٠$$

$$= ١,٣٢١٨٥ \times ١٠٠ = ١٣٢,١٨٥٪$$

(٧) الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بالقيمة (ع. ك.)

$$= \frac{\text{مجـ س ع}_٠ \text{ ك}_٠}{\text{مجـ ع}_٠ \text{ ك}_٠} = \frac{١٧٦٥٠١,٢٨}{١٣١٦} = ١٣٤,١١٩٪$$ = رقم لاسبير للأسعار

(٨) الوسط الحسابى لمناسب الأسعار مرجحاً بالقيمة (ع. ك$_١$)

$$= \frac{\text{مجـ س ع}_٠ \text{ ك}_١}{\text{مجـ ع}_٠ \text{ ك}_١} = \frac{٢٤١٨٠٢,٤}{١٨٥٦} = ١٣٠,٢٨١٪$$ = رقم باش للأسعار

(٩) الرقم التجميعى البسيط للكميات = $\frac{\text{مجـ ك}_١}{\text{مجـ ك}_٠} \times ١٠٠$

$$= \frac{١٩٤}{١٣٩} \times ١٠٠ = ١٣٩,٥٧٪$$

(١٠) الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الكميات = $\frac{\text{محـ ك}}{\text{ن}}$

$$= \frac{٥٩٥,٠١}{٤} = ٪١٤٨,٧٥٣$$

(١١) الرقم التجميعى للكميات مرجحاً بأسعار الاساس (لاسبير)

$$= \frac{\text{محـ ك}_١ \text{ع}_٠}{\text{محـ ك}_٠ \text{ع}_٠} \times ١٠٠ = \frac{١٨٥٦}{١٣١٦} \times ١٠٠ = ٪١٤١,٠٣٣$$

• أي أن حجم الانتاج (الكمية المستهلكة) قد زاد بنسبة ٤١,٠٣٣٪

بين سنى ٢٠٠٣ ، ٢٠٠٧ باعتبار سنة ٢٠٠٣ هى سنة الاساس

(١٢) الرقم التجميعى للكميات مرجحاً بأسعار المقارنة (باش)

$$= \frac{\text{محـ ك}_١ \text{ع}_١}{\text{محـ ك}_٠ \text{ع}_١} \times ١٠٠ = \frac{٢٤١٨}{١٧٦٥} \times ١٠٠ = ٪١٣٦,٩٩٧$$

• أى أن حجم الانتاج (الكمية المستهلكة) قد زاد بنسبة ٣٦,٩٩٧٪

بين سنى ٢٠٠٣، ٢٠٠٧ باعتبار سنة ٢٠٠٣ هى سنة الاساس.

(١٣) الوسط الحسابى لمناسيب الكميات مرجحاً بقيم (ع٠ ك٠)

$$= \frac{\text{محـ ك ع}_٠ \text{ ك}_٠}{\text{محـ ع}_٠ \text{ ك}_٠} = \frac{١٨٥٦٠٠,٥٢}{١٣١٦٠} = ٪١٤١,٠٣٤$$

= رقم لاسبير للكميات

(١٤) الوسط الحسابى لمناسيب الكميات مرجحاً بقيم ($ع_1ك_0$)

$$= \frac{\text{مجـ ك ع}_1\text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_0} = \frac{\text{٢٤١٨٠٠,٤٢}}{\text{١٧٦٥}} = \text{٪١٣٦,٩٩٧}$$

= رقم باش للكميات

(١٥) الرقم القياسى للقيمة

$$= \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_0} \times \text{١٠٠} = \frac{\text{٢٤١٨}}{\text{١٣١٦}} \times \text{١٠٠} = \text{٪١٨٣,٧٣٩}$$

- أى أن قيمة المجموعة السلعية زادت سنة ٢٠٠٧ بمقدار ٪٨٣,٧٣٩ عن قيمة نفس المجموعة السلعية سنة ٢٠٠٣

مثال(٤)

السلعة	الاسعار بالجنيهات ١٩٨٨	الاسعار بالجنيهات ٢٠٠٠	الكميات بالالاف ١٩٩٨	الكميات بالالاف ٢٠٠٠	الاوزان
أ	٧٠	١٧٠	٤٠	٣٠	١٠
ب	٤٢	٨٠	٧٤٠	٩٦٠	٢٥٠
جـ	١٤	٢٦	٤٥٠	٦٠٠	١٥٠
د	٢٤	٤٨	٢٣٠	٤٨٠	١٠٠

المطلوب: تكوين الارقـام القـياسـيـة الآتية لسنة ٢٠٠٠ بالنسبـة إلى سنة ١٩٩٨ كأساس:

(١) الرقم التجميعي البسيط للأسعار.

(٢) الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار.

(٣) الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار.

(٤) الرقم التجميعي للأسعار مرجحاً بكميات الأساس (لاسبير).

(٥) الرقم التجميعي للأسعار مرجحاً بكميات المقارنة (باش).

(٦) الرقم التجميعي للأسعار مرجحاً بالوسط الحسابى لكميتى الأساس والمقارنة (ادجورث).

(٧) الرقم التجميعي للأسعار مرجحاً بالوسط الهندسى لكميتى الاساس والمقارنة.

(٨) رقم فيشر للأسعار.

(٩) الرقم التجميعي للأسعار مرجحاً بأوزان ثابتة ($ك_{ث}$).

(١٠) الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بقيم الاساس ($ع_{٠}ك_{٠}$).

(١١) الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بقيم المقارنة ($ع_{١}ك_{١}$).

(١٢) الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بالقيمة ($ع_{٠}ك_{١}$).

(١٣) الرقم الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بالقيمة ($ع_{١}ك_{٠}$).

(١٤) الرقم التجميعي للكميات مرجحاً بأسعار الاساس (لاسبير).

(١٥) الرقم التجميعي للكميات مرجحاً بأسعار المقارنة (باش).

(١٦) الرقم القياسى للقيمة.

الحل

السلع	ع.	ع١	ك.	ك١	س ع١/ع. × ١٠٠	لوس	ع١ك.	ع.ك.	ع١ك١	ع.ك١	ك.+ك١	ع١(ك.+ك١)	ع.(ك.+ك١)
أ	٧٠	١٧٠	٤٠	٣٠	٢٤٢,٨٦	٢,٣٨٥٤	٦٨٠٠	٢٨٠٠	٥١٠٠	٢١٠٠	٧٠	١١٩٠٠	٤٩٠٠
ب	٤٢	٨٠	٧٤٠	٩٦٠	١٩٠,٤٨	٢,٢٧٩٩	٥٩٢٠٠	٣١٠٨٠	٧٦٨٠٠	٤٠٣٢٠	١٧٠٠	١٣٦٠٠٠	٧١٤٠٠
ج	١٤	٢٦	٤٥٠	٦٠٠	١٨٥,٧١	٢,٢٦٨٨	١١٧٠٠	٦٣٠٠	١٥٦٠٠	٨٤٠٠	١٠٥٠	٢٧٣٠٠	١٤٧٠٠
د	٢٤	٤٨	٢٣٠	٤٨٠	٢٠٠	٢,٣٠١	١١٠٤٠	٥٥٢٠	٢٣٠٤٠	١١٥٢٠	٧١٠	٣٤٠٨٠	١٧٠٤٠
	١٥٠	٣٢٤			٨١٩,٠٥	٩,٢٣٥١	٨٨٧٤٠	٤٥٧٠٠	١٢٠٥٤٠	٦٢٣٤٠		٢٠٩٢٨٠	١٠٨٠٤٠

ك.ك١	√(ك.ك١)	ع١√(ك.ك١)	ع√(ك.ك١)	ك ت	ع١ك ت	ع.ك ت	س ع.ك.	س ع١ك١	س ع.ك١	س ع١ك.
١٢٠٠	٣٤,٦٤	٥٨٨٨,٨	٢٤٢٤,٨	١٠	١٧٠٠	٧٠٠	٦٨٠٠٠٨	١٢٣٨٥٨٦	٥١٠٠٠٦	١٦٥١٤٤٨
٧١٠٤٠٠	٨٤٢,٨٥	٦٧٤٢٨	٣٥٣٩٩,٧	٢٥٠	٢٠٠٠٠	١٠٥٠٠	٥٩٢٠١١٨,٤	١٤٦٢٨٨٦٤	٧٦٨٠١٥٣,٦	١١٢٧٦٤١٦
٢٧٠٠٠٠	٥١٩,٦١	١٣٥٠٩,٨٦	٧٢٧٤,٥٤	١٥٠	٣٩٠٠	٢١٠٠	١١٦٩٩٧٣	٢٨٩٧٠٧٦	١٥٥٩٩٦٤	٢١٧٢٨٠٧
١١٠٤٠٠	٣٣٢,٢٦	١٥٩٤٨,٤٨	٧٩٧٤,٢٤	١٠٠	٤٨٠٠	٢٤٠٠	١١٠٤٠٠٠	٤٦٠٨٠٠٠	٢٣٠٤٠٠٠	٢٢٠٨٠٠٠
		١٠٢٧٧٥,١٤	٥٣٠٧٣,٢٨		٣٠٤٠٠	١٥٧٠٠	٨٨٧٤٠٩٩,٤	٢٣٣٧٢٥٢٦	١٢٠٥٤١٢٣,٦	١٧٣٠٨٦٧١

(١) الرقم التجميعى البسيط للأسعار $= \dfrac{\text{مجـ ع}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}} \times ١٠٠$

$$= \frac{٣٢٤}{١٥٠} \times ١٠٠ = ٢١٦\%$$

(٢) الوسط الحسابى البسيط لمناسب الأسعار $= \dfrac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$

$$= \frac{٨١٩,٠٥}{٤} = ٢٠٤,٨\%$$

(٣) الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار $= \dfrac{\text{مجـ لو س}}{\text{ن}}$

$$= \frac{٩,٢٣٥١}{٤} = ٢,٣٠٨٨$$

٢,٣٠٨٨ ثم inv ثم log = ٢٠٣,٦٪

(٤) الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بكميات الاساس (رقم لاسبير)

$$\frac{\text{مجـ ع}_{١}\,\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\,\text{ك}_{٠}} \times ١٠٠ = \frac{٨٨٧٤٠}{٤٥٧٠٠} \times ١٠٠ = ١٩٤,١٨\%$$

(٥) الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بكميات المقارنة (رقم باش)

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\,\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٢٠٥٤٠}{٦٢٣٤٠} \times ١٠٠ = ١٩٣,٣٦\%$$

(٦) الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بالوسط الحسابى لكميات الاساس والمقارنة (ادجورث).

$$= \frac{\text{مجـ ع}_١ (\text{ك}_. + \text{ك}_١)}{\text{مجـ ع}_. (\text{ك}_. + \text{ك}_١)} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٠٩٢٨٠}{١٠٨٠٤٠} \times ١٠٠ = ١٩٣,٧١\%$$

(٧) الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بالوسط الهندسى لكميات الاساس والمقارنة

$$= \frac{\text{مجـ ع}_١ \sqrt{\text{ك}_. \text{ ك}_١}}{\text{مجـ ع}_. \sqrt{\text{ك}_. \text{ ك}_١}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٠٢٧٧٥,١٤}{٥٣٠٧٣,٢٨} \times ١٠٠ = ١٩٣,٦٥\%$$

(٨) رقم فيشر للأسعار = $\sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش}} \times ١٠٠$

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_١ \text{ك}_.}{\text{مجـ ع}_. \text{ك}_.} \times \frac{\text{مجـ ع}_١ \text{ك}_١}{\text{مجـ ع}_. \text{ك}_١}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{\frac{١٩٤,١٨}{١٠٠} \times \frac{١٩٣,٣٦}{١٠٠}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{١,٩٣٣٦ \times ١,٩٤١٨} \times ١٠٠ = \sqrt{٣,٧٥٤٦٦٤} \times ١٠٠$$

$$= ١,٩٣٧٧ \times ١٠٠ = ١٩٣,٧٧\%$$

(٩) الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بأوزان ثابتة

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{ن}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{ن}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣٠٤٠٠}{١٥٧٠٠} \times ١٠٠ = ١٩٣,٦٣\%$$

(١٠) الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بقيم الاساس ($\text{ع}_{٠}\text{ك}_{٠}$)

$$= \frac{\text{مجـ س ع}_{٠}\text{ ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{٠}} = \frac{٨٨٧٤٠٩٩,٤}{٤٥٧٠٠} = ١٩٤,١٨\%$$

= رقم لاسبير للأسعار

(١١) الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بقيم المقارنة ($\text{ع}_{١}\text{ك}_{١}$)

$$= \frac{\text{مجـ س ع}_{١}\text{ ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{١}} = \frac{٢٣٣٧٢٥٢٦}{١٢٠٥٤٠} = ١٩٣,٩\%$$

(١٢) الوسط الحسابى لمناسب الأسعار مرجحاً بالقيمة ($\text{ع}_{٠}\text{ك}_{١}$)

$$= \frac{\text{مجـ س ع}_{٠}\text{ ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{١}} = \frac{١٢٠٥٤١٢٣,٦}{٦٢٣٤٠} = ١٩٣,٣٦\%$$ = رقم باش للأسعار

(١٣) الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار مرجحاً بالقيمة ($\text{ع}_{١}\text{ك}_{٠}$)

$$= \frac{\text{مجـ س ع}_{1}\,\text{ك}_{0}}{\text{مجـ ع}_{1}\,\text{ك}_{0}} = \frac{١٧٣٠٨٦٧١}{٨٨٧٤٠} = ١٩٥,٠٥\%$$

(١٤) الرقم التجميعى للكميات مرجحاً بأسعار الاساس (لاسبير)

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{1}\,\text{ع}_{0}}{\text{مجـ ك}_{0}\,\text{ع}_{0}} \times ١٠٠ = \frac{٦٢٣٤٠}{٤٥٧٠٠} \times ١٠٠ = ١٣٦,٤١\%$$

• أى أن باستخدام أسعار سنة ١٩٩٨ كأساس فان حجم الانتاج زاد بنسبة ٣٦,٤١٪ بين سنتى ١٩٩٨ ، ٢٠٠٠.

(١٥) الرقم التجميعى للكميات مرجحاً بأسعار المقارنة (باش)

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{1}\,\text{ع}_{1}}{\text{مجـ ك}_{0}\,\text{ع}_{1}} \times ١٠٠ = \frac{١٢٠٥٤٠}{٨٨٧٤٠} \times ١٠٠ = ١٣٥,٨٤\%$$

• أى أنه باستخدام أسعار سنة ٢٠٠٠ كأساس فان حجم الانتاج زاد بنسبة ٣٥,٨٤٪ بين سنتى ١٩٩٨ ، ٢٠٠٠.

(١٦) الرقم القياسى للقيمة

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{1}\,\text{ك}_{1}}{\text{مجـ ع}_{0}\,\text{ك}_{0}} \times ١٠٠ = \frac{١٢٠٥٤٠}{٤٥٧٠٠} \times ١٠٠ = ٢٦٣,٧٦\%$$

اختبارات الأرقام القياسية

Test of Index Numbers

هناك اختبارين لقياس مدى كفاءة الرقم القياسى اختبار الانعكاس فى الزمن واختبار الانعكاس فى المعامل.

أولاً : اختبار الانعكاس فى الزمن The time reversal test

الخطوات :

(١) **إيجاد البديل الزمنى** : بتحويل سنة الاساس (صفر) إلى سنة المقارنة (١) وسنة المقارنة (١) إلى سنة الأساس (صفر).

أى $ع_٠$ إلى $ع_١$ ، $ع_١$ إلى $ع_٠$ ، $ك_٠$ إلى $ك_١$ ، $ك_١$ إلى $ك_٠$

(٢) ضرب الرقم القياسى × بديله الزمنى

فإذا كان الناتج = ١ ∴ الرقم القياسى يقبل الانعكاس فى الزمن

وإذا كان الناتج ≠ ١ ∴ الرقم القياسى لا يقبل الانعكاس فى الزمن

ثانياً : اختبار الانعكاس فى المعامل The factor reversal test

الخطوات :

(١) إيجاد البديل المعاملى : بتحويل الأسعار (ع) إلى كميات (ك) والكميات (ك) إلى أسعار (ع)

أى $ع_٠$ إلى $ك_٠$ ، $ع_١$ إلى $ك_١$ ، $ك_٠$ إلى $ع_٠$ ، $ك_١$ إلى $ع_١$

(٢) ضرب الرقم القياسى × بديله المعاملى

فإذا كان الناتج = الرقم القياسي للقيمة $\frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_. \text{ك}_.}$

∴ الرقم القياسي يقبل الانعكاس فى المعامل

وإذا كان الناتج ≠ الرقم القياسي للقيمة $\frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_. \text{ك}_.}$

∴ الرقم لا يقبل الانعكاس فى المعامل

- أى أن كفاءة الرقم القياسي تقاس بمدى اجتيازه للاختبارات السابقة.

مثـــــال :

اختبر الرقم التجميعى البسيط للأسعار من حيث الانعكاس فى الزمن والمعامل.

الحـــــل

الرقم التجميعى البسيط للأسعار $\frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_.}$

اختبار الانعكاس فى الزمن

(١) البديل الزمنى $\frac{\text{مجـ ع}_.}{\text{مجـ ع}_1}$

(٢) الرقم القياسي × بديله الزمنى = $\frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_.} \times \frac{\text{مجـ ع}_.}{\text{مجـ ع}_1} = ١$

∴ يقبل الانعكاس فى الزمن.

اختبار الانعكاس فى المعامل :

(١) البديل المعاملى $\dfrac{\text{مجـ ك}_{١}}{\text{مجـ ك}_{٠}}$

(٢) الرقم القياسى × بديله المعامل = $\dfrac{\text{مجـ ع}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}} \times \dfrac{\text{مجـ ك}_{١}}{\text{مجـ ك}_{٠}}$

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{مجـ ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{مجـ ك}_{٠}}$$

$$\neq \frac{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{ك}_{٠}}$$

∴ لا يقبل الانعكاس فى المعامل.

مثـــال :

اختبـر الرقم التجميعى للأسـعار مرجحاً بكمـيات المقارنة (باش) فى الزمن والمعامل.

الحــــل

اختبار الانعكاس فى الزمن

(١) البديل الزمنى $\dfrac{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{ك}_{٠}}$

(٢) الرقم القياسى × بديله الزمنى $= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ك}_{١}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{١}\text{ك}_{٠}} \neq ١$

∴ لا يقبل الانعكاس فى الزمن.

اختبار الانعكاس فى المعامل :

(١) البديل المعاملى $\frac{\text{مجـ ك}_{١}\text{ع}_{١}}{\text{مجـ ك}_{٠}\text{ع}_{١}}$

(٢) الرقم القياسى × بديله المعامل $= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ك}_{١}} \times \frac{\text{مجـ ك}_{١}\text{ع}_{١}}{\text{مجـ ك}_{٠}\text{ع}_{١}}$

$$\neq \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ك}_{٠}}$$

∴ لا يقبل الانعكاس فى المعامل.

مثـــــال :

اختبر الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بالوسط الحسابى لكميتى الأساس والمقارنة فى الزمن والمعامل.

الحـــــل

الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بالوسط الحسابى لكميتى الأساس والمقارنة

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\,(\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١})}{\text{مجـ ع}_{٠}\,(\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١})}$$

اختبار الانعكاس فى الزمن

(١) البديل الزمنى $\dfrac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{.}\ (\text{ك}_{١} + \text{ك}_{.})}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{١}\ (\text{ك}_{١} + \text{ك}_{.})}$

(٢) الرقم القياسى × بديله الزمنى

$$= \frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{١}\ (\text{ك}_{.} + \text{ك}_{١})}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{.}\ (\text{ك}_{.} + \text{ك}_{١})} \times \frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{.}\ (\text{ك}_{١} + \text{ك}_{.})}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{١}\ (\text{ك}_{١} + \text{ك}_{.})} = ١$$

∴ يقبل الانعكاس فى الزمن.

اختبار الانعكاس فى المعامل :

(١) البديل المعاملى $\dfrac{\text{مجـ}\ \text{ك}_{١}\ (\text{ع}_{.} + \text{ع}_{١})}{\text{مجـ}\ \text{ك}_{.}\ (\text{ع}_{.} + \text{ع}_{١})}$

(٢) الرقم القياسى × بديله المعامل

$$= \frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{١}\ (\text{ك}_{.} + \text{ك}_{١})}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{.}\ (\text{ك}_{.} + \text{ك}_{١})} \times \frac{\text{مجـ}\ \text{ك}_{١}\ (\text{ك}_{١} + \text{ك}_{.})}{\text{مجـ}\ \text{ك}_{.}\ (\text{ك}_{١} + \text{ك}_{.})}$$

$$\neq \frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{١}\ \text{ك}_{١}}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{.}\ \text{ك}_{.}}$$

∴ لا يقبل الانعكاس فى المعامل.

مثـــال :

اختبر الوسط الحسابى لمناسيب الاسعار $\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_0}\right)}{\text{ن}}$.

الحـــــل

فى الزمن :

(١) البديل الزمنى $\frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ع}_0}{\text{ع}_1}\right)}{\text{ن}}$

(٢) الرقم × البديل = $\frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_0}\right)}{\text{ن}} \times \frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ع}_0}{\text{ع}_1}\right)}{\text{ن}} \neq 1$

∴ لا يقبل الانعكاس فى الزمن.

فى المعامل :

(١) البديل المعاملى = $\frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ك}_1}{\text{ك}_0}\right)}{\text{ن}}$

$$\text{(٢) الرقم × البديل} = \frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٠}}\right)}{\text{ن}} \times \frac{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٠}}\right)}{\text{ن}}$$

$$\neq \frac{\text{مجـ ع}_{١}\,\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\,\text{ك}_{٠}}$$

∴ لا يقبل الانعكاس فى المعامل.

مثـــال :

اختـبر الرقم القيـاسى للأسعار باسـتخدام الوسط الحسـابى لرقمى لاسبـير وباش.

الحـــل

الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً بالوسط الحسابى لكميى الأساس والمقارنة

$$= \frac{\frac{\text{مجـ ع}_{١}\,\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\,\text{ك}_{٠}} + \frac{\text{مجـ ع}_{١}\,\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}}}{٢}$$

فى الزمن

$$\text{(١) البديل الزمنى} = \frac{\frac{\text{مجـ ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{١}\,\text{ك}_{١}} + \frac{\text{مجـ ع}_{٠}\,\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{١}\,\text{ك}_{٠}}}{٢}$$

(٢) الرقم × البديل

$$= \frac{\dfrac{\text{مجـ}\,\text{ع}_{١}\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ}\,\text{ع}_{١}\text{ك}_{١}} + \dfrac{\text{مجـ}\,\text{ع}_{١}\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ}\,\text{ع}_{٠}\text{ك}_{٠}}}{٢} \times \frac{\dfrac{\text{مجـ}\,\text{ع}_{٠}\text{ك}_{١}}{\text{مجـ}\,\text{ع}_{١}\text{ك}_{١}} + \dfrac{\text{مجـ}\,\text{ع}_{٠}\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ}\,\text{ع}_{١}\text{ك}_{٠}}}{٢} \neq ١$$

∴ لا يقبل الانعكاس فى الزمن.

فى المعامل :

(١) البديل المعاملى =
$$\frac{\dfrac{\text{مجـ}\,\text{ك}_{١}\text{ع}_{٠}}{\text{مجـ}\,\text{ك}_{١}\text{ع}_{١}} + \dfrac{\text{مجـ}\,\text{ك}_{١}\text{ع}_{٠}}{\text{مجـ}\,\text{ك}_{٠}\text{ع}_{٠}}}{٢}$$

(٢) الرقم × البديل

$$= \frac{\dfrac{\text{مجـ}\,\text{ع}_{١}\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ}\,\text{ع}_{١}\text{ك}_{١}} + \dfrac{\text{مجـ}\,\text{ع}_{١}\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ}\,\text{ع}_{٠}\text{ك}_{٠}}}{٢} \times \frac{\dfrac{\text{مجـ}\,\text{ك}_{١}\text{ع}_{٠}}{\text{مجـ}\,\text{ك}_{١}\text{ع}_{١}} + \dfrac{\text{مجـ}\,\text{ك}_{١}\text{ع}_{٠}}{\text{مجـ}\,\text{ك}_{٠}\text{ع}_{٠}}}{٢}$$

$$\neq \frac{\text{مجـ}\,\text{ع}_{١}\text{ك}_{١}}{\text{مجـ}\,\text{ع}_{٠}\text{ك}_{٠}}$$

∴ لا يقبل الانعكاس فى المعامل.

مثـــــال :

اختبر الرقم القياسى الأمثل (فيشر) للأسعار فى الزمن والمعامل.

الحـــــل

$$\text{الرقم القياسى لفيشر} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_1}}$$

فى الزمن

$$(1)\ \text{البديل الزمنى}\ \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_0}}$$

(٢) الرقم × البديل

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_0}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

∴ يقبل الانعكاس فى الزمن.

فى المعامل :

$$(1)\ \text{البديل المعاملى} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_0} \times \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_1}}$$

(٢) الرقم × البديل

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_0} \times \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{مجـ ع}_{1}\ \text{ك}_{1})^{2}}{(\text{مجـ ع}_{.}\ \text{ك}_{.})^{2}}} = \frac{\text{مجـ ع}_{1}\ \text{ك}_{1}}{\text{مجـ ع}_{.}\ \text{ك}_{.}}$$

= الرقم القياسى للقيمة.

∴ يقبل الانعكاس فى المعامل.

• سمى رقم فيشر الرقم القياسى الأمثل لأنه الوحيد الذى يقبل الانعكاس فى الزمن والمعامل معاً.

ملخص لاختبارات الأرقام القياسية فى الزمن والمعامل

الرقم القياسى	الانعكاس فى الزمن	الانعكاس فى المعامل
الرقم التجميعى البسيط للأسعار	يقبل	لا يقبل
لاسبير	لا يقبل	لا يقبل
باش	لا يقبل	لا يقبل
فيشر	يقبل	يقبل
الرقم التجميعى للأسعار مرجحاً مرجحاً بمتوسط كميتى الأساس والمقارنة (ادجورث)	يقبل	لا يقبل

تمـــارين

(١) إذا كانت لديك أسعار وكميات سنتى ٢٠٠٠، ٢٠٠١ كالآتى

السلعة	٢٠٠٠		٢٠٠١	
	سعر	كمية	سعر	كمية
أ	٢	١٠٠	٤	٣٠٠
ب	١	٢٠٠	٥	٨٠٠
جـ	٣	٤٠٠	٢	٣٠٠

أوجد الأرقام القياسية الآتية :

١- منسوب السعر [٢٠٠٪، ٥٠٠٪، ٦٦,٦٧٪]

٢- الرقم التجميعى البسيط للأسعار [١٨٣,٣٣٪]

٣- رقم لاسبير للأسعار [١٣٧,٥٪]

٤- رقم باش للأسعار [٢٥٢,١٧٪]

٥- رقم فيشر للأسعار [١٨٦,٢٪]

٦- منسوب الكمية [٣٠٠٪، ٤٠٠٪، ٧٥٪]

٧- الرقم التجميعى البسيط للكميات [٢٠٠٪]

٨- رقم لاسبير للكميات [١٤٣,٧٥٪]

٩- رقم باش للكميات [٢٦٣,٦٣٪]

١٠- رقم فيشر للكميات [١٩٤,٦٧٪]

١١- منسوب القيمة [٦٠٠٪، ٢٠٠٠٪، ٥٠٪]

١٢- الرقم القياسى للقيمة [٣٦٢,٥٪]

(٢) معطى لك الجدول الآتى :

السلع	سعر ٩٥	كمية ٩٧	سعر ٩٥	كمية ٩٧
أ	٣٠	٢٠	٢٠	٤٠
ب	٢٠٠	٤٠٠	٤٠	٨٠
جـ	٧٠	١٠٠	٦٠	١٢٠

قارن بين سنتى ٩٥، ٩٧ (اعتبر سنة ٩٥ هى سنة الاساس)

١- اوجد رقم لاسبير للكميات [١٤٤٪]

٢- اوجد رقم باش للأسعار [١٧٥٪]

٣- اضرب الناتج (١) × الناتج (٢). ماذا تلاحظ.

(٣) افترض أن لديك البيانات التالية :

السلع	سعر ٩٠	كمية ٩٠	سعر ٩٦	كمية ٩٦
أ	٧	١٢	١٠	١٦
ب	٢	٨	٤	١٠
جـ	٦	١٥	٩	١٨

١- احسب رقم لاسبير للأسعار [١٥١,٠٥٪]

٢- احسب رقم باش للأسعار [١٥٠,٨٣٪]

(٤) معطى لك الجدول التالى لثلاث سلع

السلع	الكمية	سعر ٩٠	سعر ٩١	سعر ٩٢
(١)	١٠٠	١٥	٢٠	٢٥
(٢)	١٥٠	٥٠	٦٠	٨٠
(٣)	٢٠٠	٤٠	٤٥	٥٥

باعتبار سنة ٩٠ هى سنة الاساس اوجد الرقم القياسى لأسعار سنة ٩٢. [١٥٠٪]

(٥) البيانات التالية لأربع سلع لسنتى ١٩٩٥، ٢٠٠٠.

السلع	١٩٩٥		٢٠٠٠	
	سعر	كمية	سعر	كمية
أ	٠,٠٦	٢٠٠٠	٠,٠٥	١٥٠٠
ب	٠,١	٢٠٠	٠,١٢	٢٠٠
جـ	٠,٢	٤٠٠	٠,١٨	٥٠٠
د	٠,٣	١٠٠	٠,٥	٢٠٠

اوجد :

١- الرقم التجميعى للأسعار [١٢٨,٧٩٪]

٢- الرقم التجميعى للقيمة [١١٥,٦٪]

٣- رقم لاسبير للأسعار [٩٨,٤٪]

٤- رقم باش للأسعار [١٠٧,٠٤٪]

٥- رقم فيشر للأسعار [١٠٢,٦٣٪]

(٦) معطى لك الجدول التالى :

السلعة	١٩٩٩		٢٠٠٠	
	سعر	كمية	سعر	كمية
أ	٧	٢٠	٩	٤٠
ب	٤	٦٠	٦	١٠٠
جـ	٣	٢٠٠	٤	٣٠٠

اعتبر سنة ١٩٩٩ هى سنة الأساس اوجد :

١- رقم لاسبير للأسعار [٪١٣٦,٧٣]

٢- رقم باش للكميات [٪١٦١,١٩]

٣- الرقم القياسى للقيمة [٪٢٢٠,٤١]

(٧) معطى لك الجدول التالى باعتبار سنة ١٩٩٧ هى سنة الأساس

السلعة	١٩٩٧		١٩٩٩	
	سعر	كمية	سعر	كمية
أ	٧	٢٠	٩	٤٠
ب	٤	٦٠	٦	١٠٠
جـ	٣	٢٠٠	٤	٣٠٠

اوجد: ١- الرقم التجميعى للأسعار [٪١٣٥,٧]

٢- رقم لاسبير للأسعار [٪١٣٦,٧]

٣- رقم باش للأسعار [٪١٣٦,٧]

٤- رقم فيشر للأسعار [٪١٣٦,٧]

٥- الرقم القياسى للقيمة [٪٢٢٠,٤]

(٨) إذا كان لديك البيانات التالية

السلع	كمية ١٩٩٣	كمية ١٩٩٥	سعر ١٩٩٣	سعر ١٩٩٤	سعر ١٩٩٥
أ	١٥	١٠	١٠	١٦	٢٠
ب	١٠٠	٢٠٠	٢٠	٣٠	٤٠
جـ	٣٥	٥٠	٣٠	٥٠	٦٠

باعتبار سنة ١٩٩٣ هى سنة الاساس، ١٩٩٥ هى سنة المقارنة اوجد:

١- رقم لاسبير للكميات.

٢- رقم باش للأسعار.

٣- اضرب الناتج (١) × الناتج (٢). علق على النتيجة.